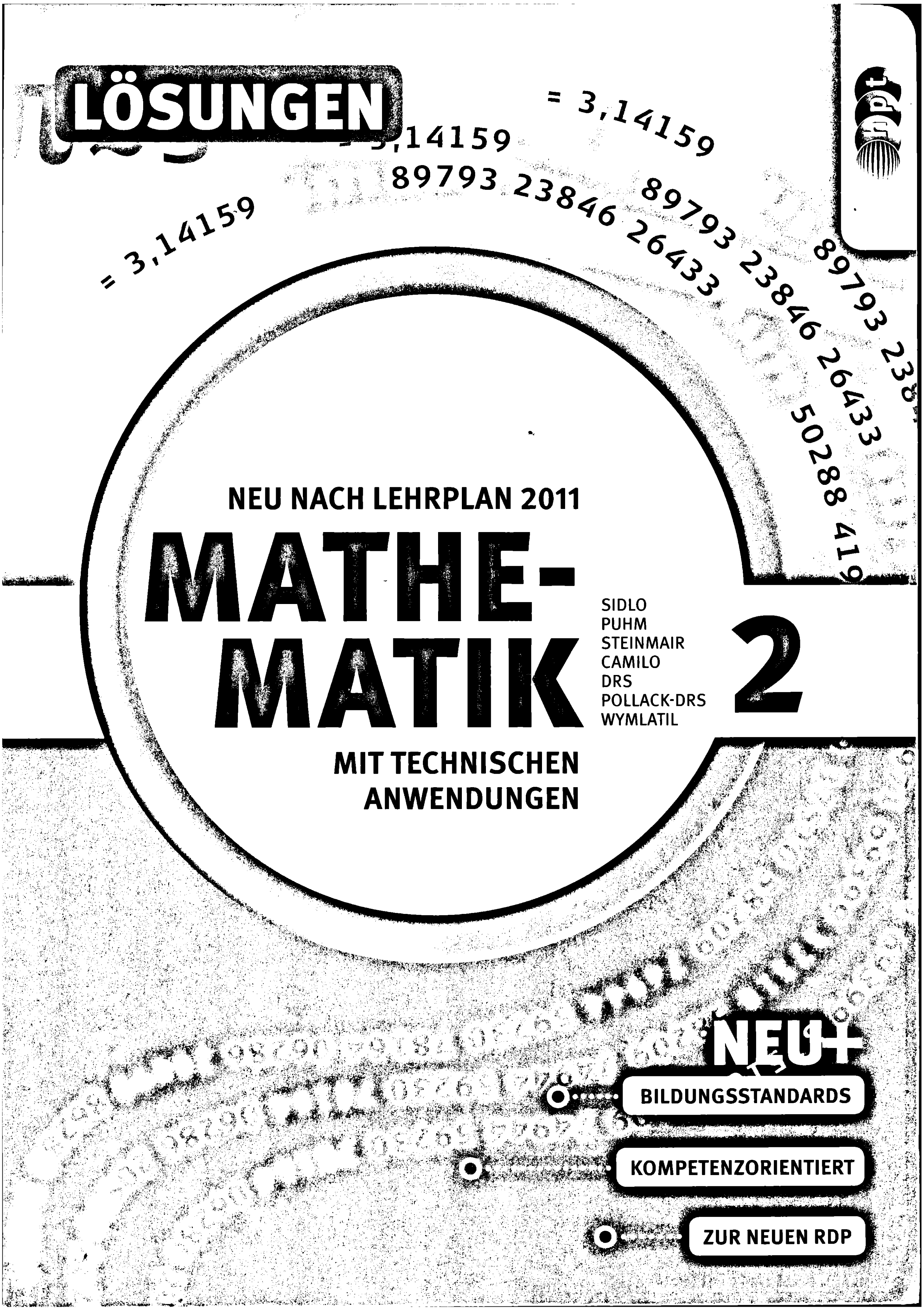
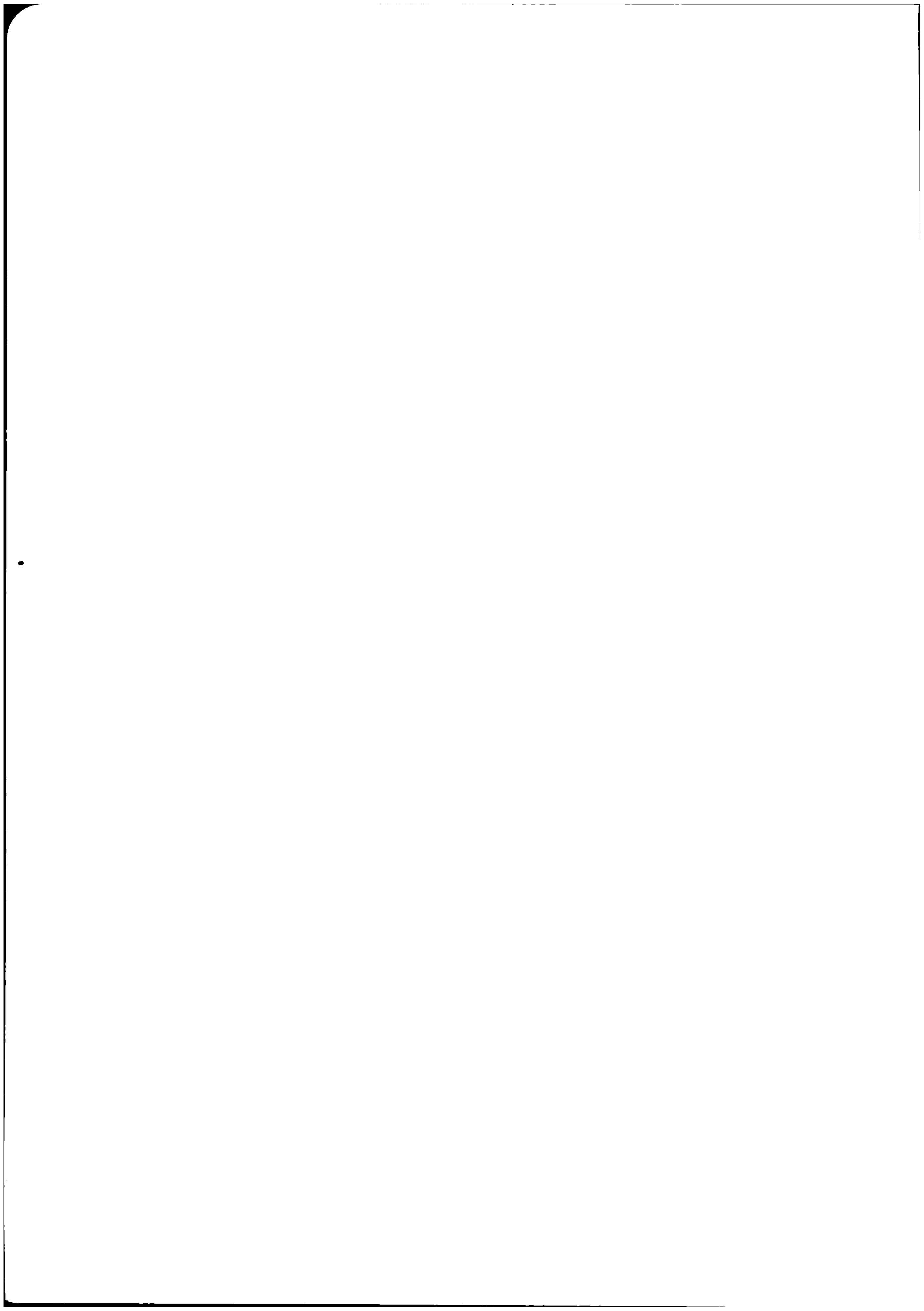


LÖSUNGEN
NEU NACH LEHRPLAN 2011
MATHEMATIK
MIT TECHNISCHEN ANWENDUNGEN
SIDLO
PUHM
STEINMAIR
CAMILO
DRS
POLLACK-DRS
WYMLATIL
2
NEU+
BILDUNGSSTANDARDS
KOMPETENZORIENTIERT
ZUR NEUEN RDP



Eva-Maria Sidlo
Ursula Puhm
Cornelia Steinmair
Christina Camilo
Wolfgang Drs
Susanne Pollack-Drs
Georg Wymlatil

Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 2
Neu nach Lehrplan 2011

Lösungen

bearbeitet von
Petrus Dullnig und Birgit Schiefer

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH
www.hpt.at

Dieses Lösungsheft enthält die Lösungen zu den Aufgaben in folgendem Schulbuch:

Schulbuch Nr. 160001 „Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 2 – Neu nach Lehrplan 2011"

Die Autorinnen und Autoren sowie der Verlag bitten, alle Anregungen und Vorschläge, die dieses Lösungsheft betreffen, an folgende Adresse zu senden:

Verlag Hölder – Pichler – Tempsky GmbH, Lektorat
1090 Wien, Frankgasse 4
E-mail: service@hpt.at



Kopierverbot

1. Auflage, Nachdruck 2014 (1,01)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Peter Barosch KG, 1220 Wien
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, 2752 Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-03554-7

Funktionen

1.1 *1)* $W(t) = 105\,\ell - 15\,\frac{\ell}{min} \cdot t$

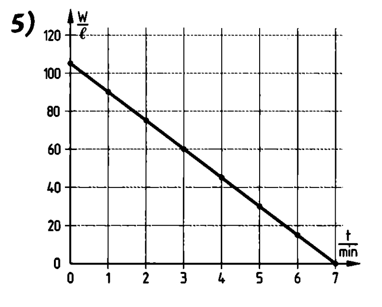
2)

$\frac{t}{min}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{W(t)}{\ell}$	105	90	75	60	45	30	15	0	−15

3) 7 Minuten; Werte von 0 bis 7 Minuten; Definitionsmenge

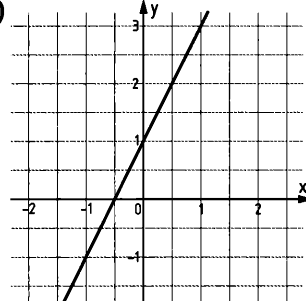
4) Werte von 0 bis 105 ℓ

5)



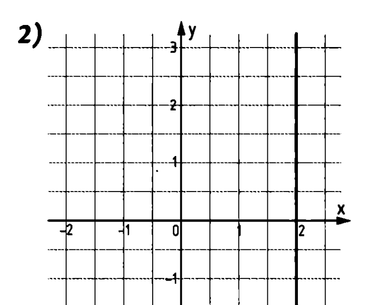
6) Der Graph ist eine Gerade.

1.2 **a)** *1)*



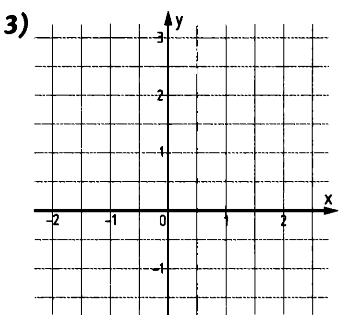
Funktion. Die Funktionsgleichung ist die Gleichung einer linearen Funktion mit Ordinatenabschnitt d = 1 und mit Steigung k = 2.

2)



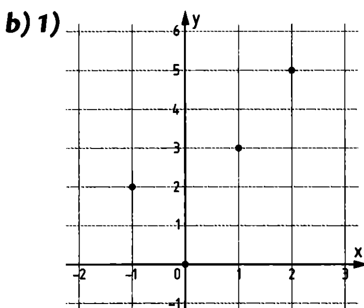
Keine Funktion. Dem x-Wert x = 2 sind unendlich viele y-Werte zugeordnet.

3)



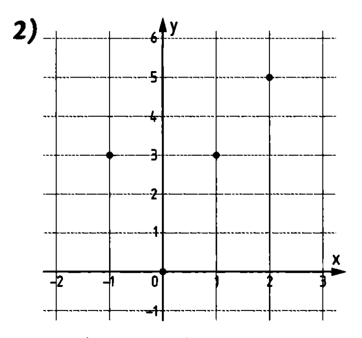
Funktion. Die Funktionsgleichung ist die Gleichung einer linearen Funktion mit Ordinatenabschnitt d = 0 und mit Steigung k = 0.

b) *1)*



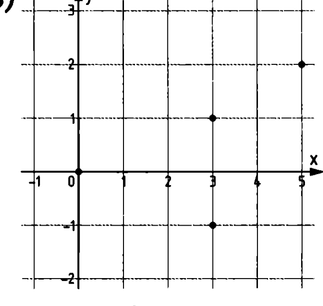
Funktion. Jedem x-Wert ist genau ein y-Wert zugeordnet.

2)



Funktion. Jedem x-Wert ist genau ein y-Wert zugeordnet.

3)



Keine Funktion. Dem x-Wert x = 3 sind die y-Werte y = 1 und y = −1 zugeordnet.

1.3 *1)* Richtig. Der Punkt P(−1|−3) ist der tiefste Punkt in seiner Umgebung.

2) Falsch. Die Funktion ist wegen des Minimums bei x = −1 in]−∞; −1[streng monoton fallend.

3) Falsch. Der Funktionsgraph schneidet die 1. Mediane auch im Punkt F(−2|−2).

4) Richtig. Der Funktionsgraph schneidet die x-Achse an zwei Stellen.

5) Falsch. Der an der y-Achse gespiegelte Punkt $P_1(1|-3)$ des Punkts P(−1|−3) liegt nicht am Funktionsgraph.

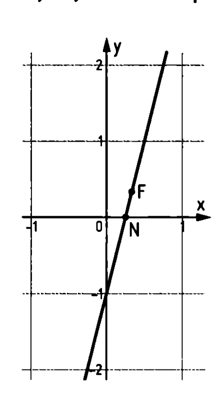
6) Richtig. Der Punkt (2|6) liegt auf dem Funktionsgraphen.

7) Falsch. Die Funktionsgleichung hat nicht die Form y = kx + d.

1.4 – 1.8

1.4 ***1)*** steigend
2)]−2; 3[
3) einen Tiefpunkt
4) eine Nullstelle
5), 6) ein Hochpunkt bzw. ein Fixpunkt

1.5



$N\left(\frac{1}{4}\middle|0\right)$, $F\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$

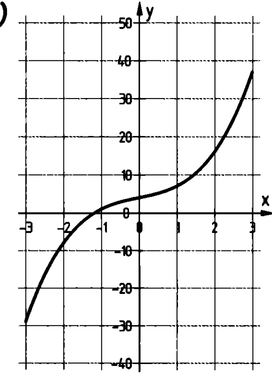
1.6 ***a) 1)*** symmetrisch, ungerade ***2)*** periodisch, $p = 2\pi$

3) $N_k(k \cdot \pi|0)$, $k \in \mathbb{Z}$; $T_k\left((4k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; $H_k\left((4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\middle|0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
$\left](4k-1)\cdot\frac{\pi}{2}; (4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ streng monoton steigend, $\left](4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; (4k+3)\cdot\frac{\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ streng monton fallend

b) 1) symmetrisch, gerade ***2)*** nicht periodisch

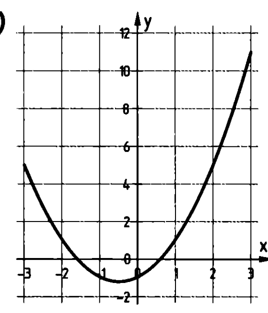
3) $N_1(-3|0)$, $N_2(3|0)$; $T_1 = (-2|-2)$, $T_2 = (2|-2)$; $H = (0|-1)$; $]-\infty; -2[$ streng monoton fallend, $]-2; 0[$ streng monoton steigend, $]0; 2[$ streng monoton fallend, $]2; \infty[$ streng monoton steigend

1.8 ***a) 1)***



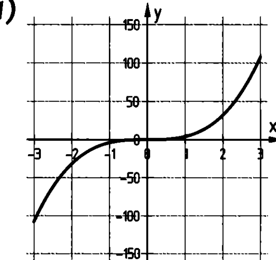
2) Nullstelle: $x_N \approx -1{,}18$; keine Extrempunkte
3) Anhand des Graphen vermutet man, dass die Funktion nicht symmetrisch ist.
Rechnerische Begründung:
$f(-x) = -x^3 - 2x + 4 \neq f(x)$ bzw.
$-f(-x) = -(-x^3 - 2x + 4) = x^3 + 2x - 4 \neq f(x)$

b) 1)



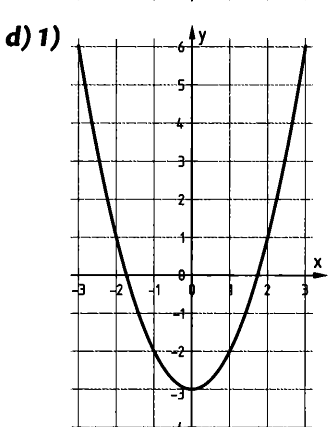
2) Nullstellen: $x_1 \approx -1{,}62$, $x_2 \approx 0{,}62$;
Tiefpunkt: $T(-0{,}5|-1{,}25)$
3) Anhand des Graphen vermutet man, dass die Funktion nicht symmetrisch ist.
Rechnerische Begründung:
$f(-x) = x^2 - x - 1 \neq f(x)$ bzw.
$-f(-x) = -(x^2 - x - 1) = -x^2 + x + 1 \neq f(x)$

c) 1)



2) Nullstelle: $x_N = 0$; keine Extrempunkte
3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph symmetrisch zum Koordinatenursprung, die Funktion also ungerade ist.
Rechnerische Begründung:
$-f(-x) = -4 \cdot (-x)^3 = 4x^3 = f(x)$

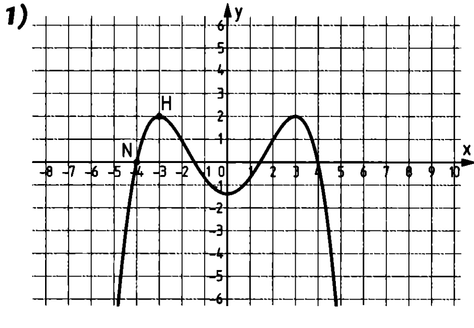
d) 1)



2) Nullstellen: $x_1 \approx -1{,}41$, $x_2 \approx 1{,}41$; Tiefpunkt: T(0|−2)
3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse, die Funktion also gerade ist.
Rechnerische Begründung:
$f(-x) = -(-x)^2 + 2 = -x^2 + 2 = f(x)$

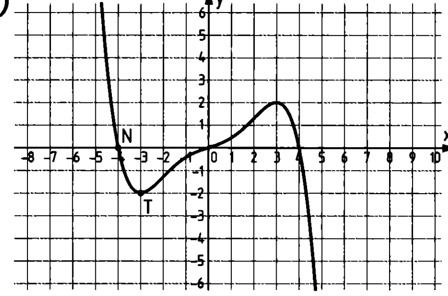
1.9 Die Funktion und die erste Mediane grafisch darstellen. Alle Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Mediane (zB mit TI-Nspire durch Angabe geeigneter Schranken) ermitteln, ergibt $F_1(-1{,}618...|-1{,}618...)$, $F_2(0{,}618...|0{,}618...)$, $F_3(1|1)$.

1.10 *1)*



Die Funktion ist gerade, H(−3|2) ist daher ein weiterer Hochpunkt, N(−4|0) ist eine weitere Nullstelle.
Falls die Funktion nur einen Tiefpunkt hat, muss dieser auf der y-Achse eingezeichnet werden.

2)



Die Funktion ist ungerade, sie muss daher durch den Koordinatenursprung gehen, T(−3|−2) ist ein Tiefpunkt, N(−4|0) ist eine weitere Nullstelle.

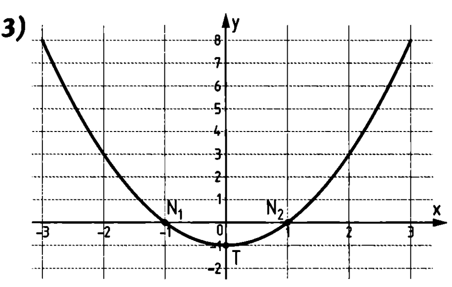
1.11 – 1.14

1.11 ***a)*** ***1)***

x	y
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8

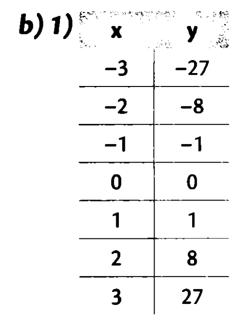
2) Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, Tiefpunkt T(0|−1), die Funktion ist gerade. Die Funktion ist im angegebenen Definitionsbereich für $x < 0$ streng monoton fallend, für $x > 0$ streng monoton steigend.

3)



Der Graph hat die in ***2)*** angegebenen Eigenschaften.

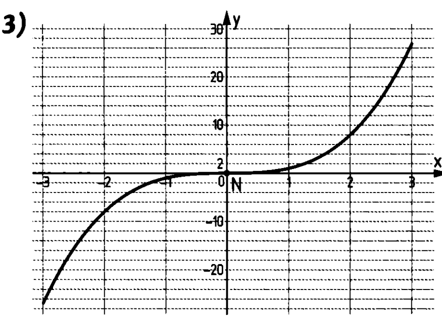
b) ***1)***



x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

2) Nullstelle $x_N = 0$, keine Extrempunkte, die Funktion ist ungerade. Die Funktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.

3)



Der Graph hat die in ***2)*** angegebenen Eigenschaften.

1.12 ***1)*** $x = -2$ ***2)*** keine Polstelle ***3)*** $x = 2$ ***4)*** $x = 3$

1.13 ***1)*** Größter Gewinn bei 300 Stück; ablesen im Hochpunkt H(300|150).
2) Gewinn ab 100 Stück; dieser Wert entspricht der Nullstelle.
3) Im Bereich von 300 Stück bis 600 Stück nimmt der Gewinn ab.
4) In den Bereichen 100 Stück bis 300 Stück bzw. 600 Stück bis 700 Stück wächst der Gewinn. (Fasst man den Verlust als negativen Gewinn auf, lautet die Antwort: In den Bereichen 0 Stück bis 300 Stück bzw. 600 Stück bis 700 Stück wächst der Gewinn.)
5) 50 GE Gewinn bei 600 Stück.
6) Ca. 175 Stück, ca. 460 Stück bzw. 700 Stück müssen verkauft werden.

1.14 ***1)*** Das Motorrad startet mit konstanter Beschleunigung, bis es eine Geschwindigkeit von ca. 40 $\frac{km}{h}$ erreicht. Danach erhöht sich die Geschwindigkeit bei kleiner werdender Beschleunigung auf 50 $\frac{km}{h}$. Die Fahrt wird ca. 5 Sekunden mit 50 $\frac{km}{h}$ fortgesetzt. Anschließend wird die Geschwindigkeit mit größer werdender Verzögerung auf ca. 40 $\frac{km}{h}$ verringert und das Motorrad schließlich mit konstanter Verzögerung bis zum Stillstand abgebremst.

2) ***A)*** nach ca. 10 Sekunden
B) im Zeitbereich [0 s; 10 s]
C) im Zeitbereich [15 s; 30 s]
D) im Zeitbereich [10 s; 15 s]
E) ca. 43 $\frac{km}{h}$
F) nach ca. 3 Sekunden bzw. nach ca. 24 Sekunden

3) Es sind individuell verschiedene Antworten möglich.

1.15 ***1)*** $D_h = [0 \text{ min}; 30 \text{ min}]$

$\frac{t}{min}$	0	5	10	15	20	25	30
$\frac{h(t)}{cm}$	10	25	40	55	70	85	100

Für die Wasserstandshöhe ergeben sich Werte von 10 cm bis 100 cm in 15-cm-Schritten.

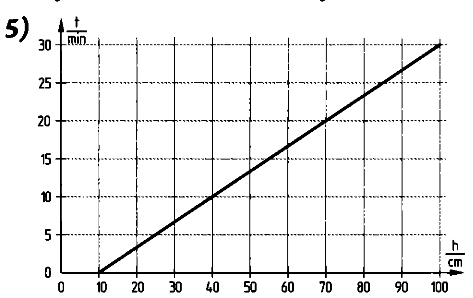
2) $t(h) = \frac{h - 10\text{ cm}}{3\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}}$

3)

$\frac{h}{cm}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{t(h)}{min}$	0	$3{,}\dot{3}$	$6{,}\dot{6}$	10	$13{,}\dot{3}$	$16{,}\dot{6}$	20	$23{,}\dot{3}$	$26{,}\dot{6}$	30

4) $D_t = [10 \text{ cm}; 100 \text{ cm}]$; $W_t = [0 \text{ min}; 30 \text{ min}]$

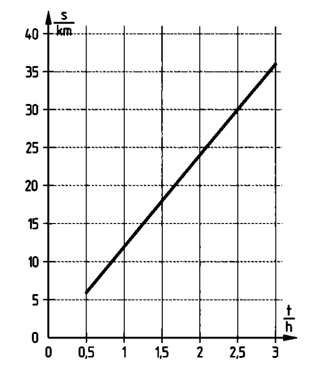
5)



Der neue Graph ist wie der ursprüngliche Graph der Graph einer linearen Funktion.

1.16 ***1)***

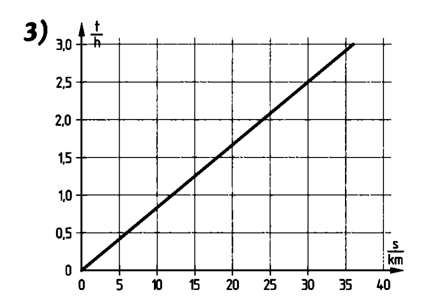
$\frac{t}{h}$	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\frac{s(t)}{km}$	6	12	18	24	30	36



2) $t(s) = \frac{1}{12}\frac{h}{km} \cdot s$

$\frac{s}{km}$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$\frac{t(s)}{h}$	0	$0{,}\dot{3}$	$0{,}\dot{6}$	1	$1{,}\dot{3}$	$1{,}\dot{6}$	2	$2{,}\dot{3}$	$2{,}\dot{6}$	3

3)



Der neue Graph ist wie der ursprüngliche Graph der Graph einer linearen Funktion.

1.17 ***1)*** –   ***2)*** die Umkehrfunktion

1.19 bis **1.21**: Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

1.19 ***1)*** Relation, da dem x-Wert 1 unendlich viele y-Werte zugeordnet werden.
2) Funktion, da jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird.
3) Relation, da es x-Werte gibt, denen zwei y-Werte zugeordnet sind.
4) Funktion, bei der Spiegelung entsteht derselbe Graph.

1.20 ***a)*** Umkehrfunktion; $f^{-1}: y = \frac{x}{5}$
b) Umkehrfunktion; $f^{-1}: y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$
c) Umkehrfunktion und Funktion sind identisch; $f^{-1}: y = -x + 1$
d) Die Umkehrrelation ist keine Funktion.
a) – c) Der Graph der Funktion ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend bzw. fallend. Die Umkehrrelation ist daher ebenfalls eine Funktion.
d) Zu $x = 4$ gibt es unendlich viele y-Werte. Die Umkehrrelation ist daher keine Funktion.

1.21 ***a)*** Die Umkehrrelation ist keine Funktion.
b) Die Umkehrrelation ist keine Funktion.
c) Umkehrfunktion; $f^{-1}: y = 2x$
d) Umkehrfunktion; $f^{-1}: y = \frac{2}{x} - 3$
a) – b) Zu jedem $x > 0$ gibt es zwei y-Werte. Die Umkehrrelation ist daher keine Funktion.
c) Der Graph der Funktion ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend. Die Umkehrrelation ist daher ebenfalls eine Funktion.
d) Der Graph der Funktion wird von allen Parallelen zur x-Achse genau einmal geschnitten. Die Umkehrrelation ist daher eine Funktion.

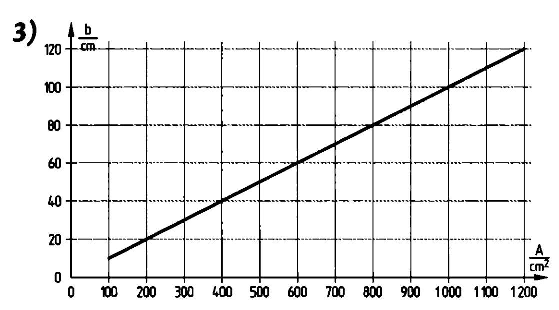
1.22 ***1)*** $A(b) = 10\text{ cm} \cdot b$

$\frac{b}{cm}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$\frac{A(b)}{cm^2}$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 200

2) $b(A) = \frac{A}{10\text{ cm}}$

$\frac{A}{cm^2}$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 200
$\frac{b(A)}{cm}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120

3)



Auf der x-Achse und auf der y-Achse werden jeweils verschiedene Größen eingetragen.

4) Die Umkehrrelation ist eine Funktion; lineare Funktion.

5) Die Definitionsmenge der Funktion ist die Wertemenge der Umkehrfunktion und umgekehrt. Beide Graphen sind linear, gehen durch den Koordinatenursprung und sind streng monoton steigend. Die Steigungen sind verschieden (k_1 = 10 cm, k_2 = 0,1 cm^{-1}).

1.23 **a)** **1)** symmetrisch, gerade
2) nicht periodisch
3) lokales Maximum (0|2)
4) N_1(−1,4|0), N_2(1,4|0)
5)]−∞; 0[streng monoton steigend,]0; ∞[streng monoton fallend

b) **1)** nicht symmetrisch
2) nicht periodisch
3) –
4) N(−1,2|0)
5) streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich

c) **1)** symmetrisch, ungerade
2) nicht periodisch
3) –
4) N(0|0)
5) streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich

d) **1)** symmetrisch, gerade
2) periodisch
3) lokale Maxima: ... (−4|1), (0|1), (4|1)...
lokale Minima: ... (−6|−1), (−2|−1), (2|−1), (6|−1) ...
4) Nullstellen: ... (−5|0), (−3|0), (−1|0), (1|0), (3|0) ...
5) streng monoton steigend: ...]−6; −4[,]−2; 0[,]2; 4[...
streng monoton fallend: ...]−4; −2[,]0; 2[,]4; 6[...

e) **1)** symmetrisch, gerade
2) nicht periodisch
3) lokales Maximum: (0|2)
lokale Minima: (−1,4|−2), (1,4|−2)
4) N_1(−1,9|0), N_2(−0,7|0), N_3(0,7|0), N_4(1,9|0)
5) streng monoton steigend:]−1,4; 0[,]1,4; ∞[
streng monoton fallend:]−∞; −1,4[,]0; 1,4[

f) **1)** nicht symmetrisch
2) nicht periodisch
3) lokale Maxima: (1|1), (3|1),
lokales Minimum: (2|0)
4) N_1(0,6|0), N_2(3,4|0)
5) streng monoton steigend:]−∞; 1[,]2; 3[
streng monoton fallend:]1; 2[,]3; ∞[

1.24 **a)** **1)** –
2) N(0|0); F_1(−1,414...|−1,414...), F_2(0|0), F_3(1,414...|1,414...); keine Extrempunkte
3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, die Funktion also ungerade ist.
$f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 = -\frac{1}{2} \cdot x^3 = -f(x)$

b) **1)** –
2) N_1(−2|0), N_2(2|0); F_1(−1,561...|−1,561...), F_2(2,561...|2,561...); T(0|−4)
3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse, die Funktion also gerade ist.
$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$

c) **1)** –

2) $N_1(-2{,}278...|0)$, $N_2(2{,}278...|0)$; $F_1(-2{,}366...|-2{,}366...)$, $F_2(2{,}179...|2{,}179...)$; $T(0|1)$, $H_1(-1{,}581...|7{,}25)$, $H_2(1{,}581...|7{,}25)$

3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse, die Funktion also gerade ist.
$f(-x) = -(-x)^4 + 5 \cdot (-x)^2 + 1 = -x^4 + 5x^2 + 1 = f(x)$

d) **1)** –

2) $N_1(-6{,}324...|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(6{,}324...|0)$; $F_1(-7{,}745...|-7{,}745...)$, $F_2(0|0)$, $F_3(7{,}745...|7{,}745...)$; $T(3{,}651...|-4{,}868...)$; $H(-3{,}651...|4{,}868...)$

3) Anhand des Graphen vermutet man, dass der Funktionsgraph punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, die Funktion also ungerade ist.
$f(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -\frac{1}{20} \cdot x^3 + 2x = -f(x)$

1.25 **2)** Während der zweiten Stunde beträgt die Höhe des Wasserstands 50 cm.

3) Der Betrag der Steigung des Graphen während des Ablassens des Wassers ist kleiner als die Steigung des Graphen während des Befüllens. Daher dauert das Ablassen des Wassers länger als das Befüllen.

1.26 Es ist mit individuell recherchierten Daten zu arbeiten.

1.27 **1)** Falsch. Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert und hat dort eine Polstelle.

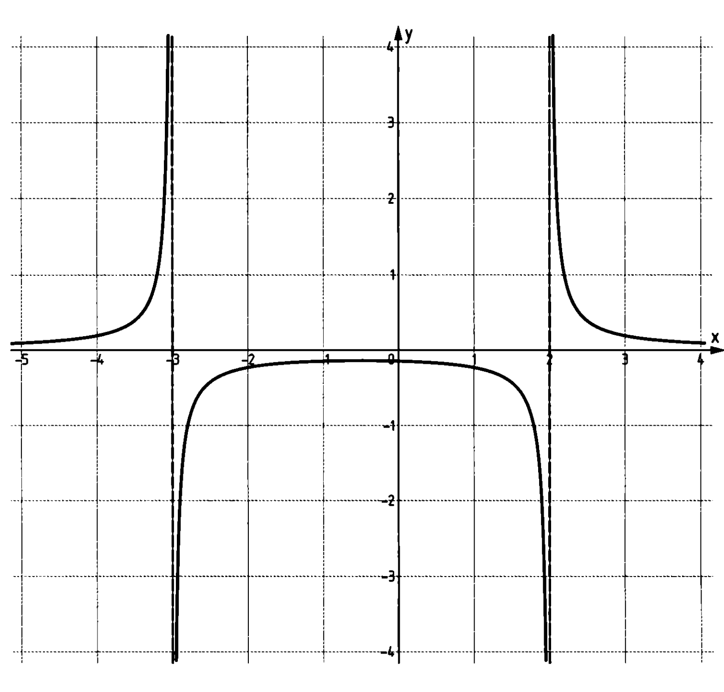
2) Richtig. Für jede Stelle x gilt $f(x) = x$.

3) Richtig. Die Funktionswerte wiederholen sich nach der Periode p und auch nach Vielfachen der Periode p, also nach 2p, 3p usw.

4) Richtig. Die lineare Funktion $y = 0$ hat zwei Nullstellen.

1.28 Polstellen bei $x = -3$ und $x = 2$

Polstellen befinden sich dort, wo die Funktion nicht definiert ist. Setzt man für x im Funktionsterm die Werte −3 bzw. 2 ein, ergibt sich eine Division durch null. Diese ist nicht definiert. Stellt man den Funktionsgraphen dar, so erkennt man, dass die Funktionswerte bei Annäherung an jede der beiden Stellen ins „Unendliche" fallen bzw. wachsen. Der Funktionsgraph nähert sich der senkrechten Geraden $x = -3$ bzw. $x = 2$.



1.29 ***a)*** Umkehrfunktion; $f^{-1}\colon y = \frac{4x+1}{2x-1}$

b) Umkehrfunktion; $f^{-1}\colon y = \frac{1}{x-3}$

c) Umkehrfunktion; $f^{-1}\colon y = \frac{2x+2}{3-x}$

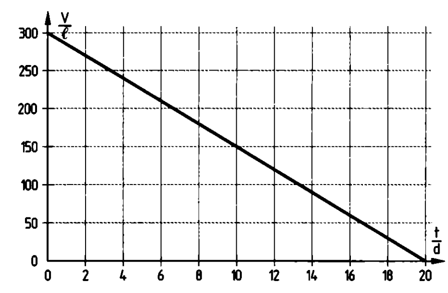
d) Die Umkehrrelation ist keine Funktion.

a) – c) Der Graph der Funktion wird von allen Parallelen zur x-Achse genau einmal geschnitten. Die Umkehrrelation ist daher eine Funktion.

d) Da zwei x-Werte der ursprünglichen Funktion den gleichen y-Wert haben (zB f(1) = f(–1) = 0), ist die Umkehrrelation keine Funktion.

1.30 ***1)*** $V(t) = 300\,\ell - 15\,\frac{\ell}{d}\cdot t;\quad t \in [0\,d; 20\,d]$

$\frac{t}{d}$	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
$\frac{V(t)}{\ell}$	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30	0

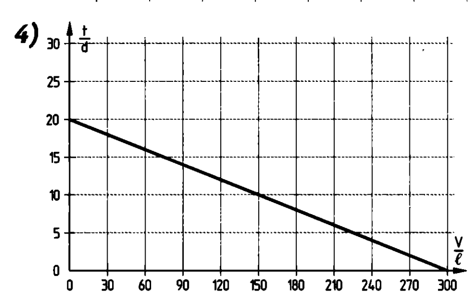


2) $t(V) = 20\,d - \frac{V}{15\frac{\ell}{d}}$

3) $V \in [0\,\ell; 300\,\ell];\quad t \in [0\,d; 20\,d]$

$\frac{V}{\ell}$	**0**	**30**	**60**	**90**	**120**	**150**	**180**	**210**	**240**	**270**	**300**
$\frac{t(V)}{d}$	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0

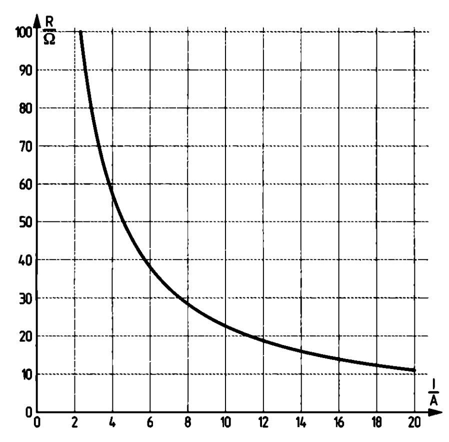
4)



Die neue Funktion ist die Umkehrfunktion zur ursprünglichen Funktion.

1.31 ***1)*** $I \in]0\ A; \infty[$ (theoretisch)

$\frac{I}{A}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\frac{R(I)}{\Omega}$	115	57,5	$38,\dot{3}$	28,75	23	$19,1\dot{6}$	16,428...	14,375	$12,\dot{7}$	11,5



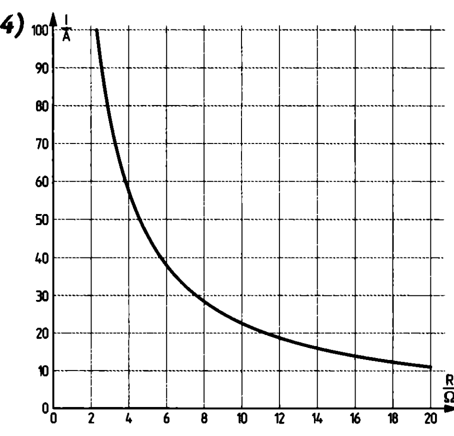
$R \in]0\ \Omega; \infty[$ (theoretisch)

2) $I(R) = \frac{230\ V}{R}$

3) $R \in]0\ \Omega; \infty[$; $I \in]0\ A; \infty[$ (theoretisch)

$\frac{R}{\Omega}$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\frac{I(R)}{A}$	115	57,5	$38,\dot{3}$	28,75	23	$19,1\dot{6}$	16,428...	14,375	$12,\dot{7}$	11,5

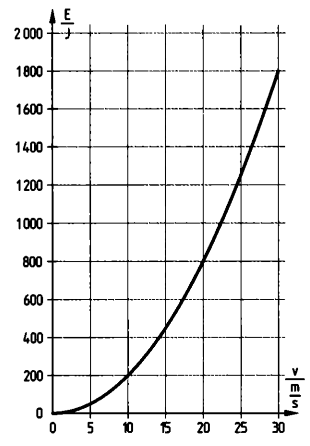
4)



Die Graphen sind zur 1. Mediane symmetrisch und daher identisch.

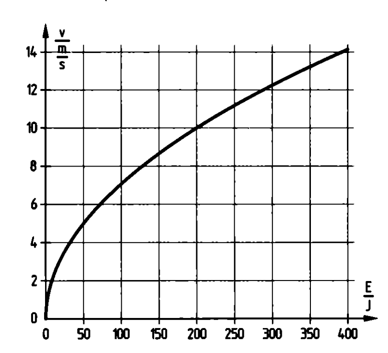
1.32 ***1)***

$\frac{v}{\frac{m}{s}}$	0	5	10	15	20	25	30
$\frac{E(v)}{J}$	0	50	200	450	800	1 250	1 800



2) Der Graph der Funktion, der die kinetische Energie in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit darstellt, wird von allen Parallelen zur waagrechten Achse genau einmal geschnitten. Deshalb ist die Umkehrrelation eine Funktion, die die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der kinetischen Energie angibt.

$v(E) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$



2 Potenzen und Potenzfunktionen

2.1 8; Zähler: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert, $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$, Vorzeichenregel $(-2)^5 = -2^5$. Nenner: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert, $-2^4 \cdot 2^{-2} = -2^{4+(-2)} = -2^2$; Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert, $\frac{-2^5}{-2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = 8$.

2.2

1) $a^n \cdot a^m$ Eine Potenz mit einer Summe als Exponenten kann in ein Produkt von Potenzen mit gleicher Basis und den einzelnen Summanden als Exponenten umgeformt werden.

2) $(a \cdot b)^n$ Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem Exponenten potenziert.

3) $(a^n)^m$ Eine Potenz mit einem Produkt als Exponent kann in eine Potenz mit dem ersten Faktor als Exponent umgeformt werden, die mit dem zweiten Faktor potenziert wird.

2.3 ***a)*** 1 ***b)*** -1 ***c)*** $-\frac{1}{4^{15}}$

2.4 ***a)*** $\frac{2^3 \cdot d^6 \cdot g^3}{f^6}$ ***b)*** $\frac{4^4 \cdot d^6}{c^8 \cdot k^{14}}$ ***c)*** $-\frac{m^9}{5^3 \cdot n^3 \cdot p^{33}}$

2.5 ***a)*** $-3 \cdot 4^{-1} \cdot y^{-11}z^{-8}$ ***b)*** $-3 \cdot 2^{-1} \cdot p^{-3}q^{11}$ ***c)*** $2^{-8} \cdot 3^{-6} \cdot c^{12}x^{-1}$

2.6 ***a)*** $4 \cdot 9^{-1} \cdot a^4b^{-2}c^6$ ***b)*** $-8^{17} \cdot a^{20}$

2.7 ***a)*** -5^8u^{-36} ***b)*** $3^2 \cdot a^{26}$

2.8

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Satz des Pythagoras

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ Radius eines Kreises bei gegebenem Flächeninhalt

$d = \sqrt{2} \cdot a$ Diagonale eines Quadrats

2.13 ***a)*** 10, da $10^5 = 100\,000$ ***c)*** 2, da $2^8 = 256$ ***e)*** $\frac{1}{2}$, da $1^6 = 1$ und $2^6 = 64$

b) 7, da $7^3 = 343$ ***d)*** $\frac{1}{12}$, da $1^2 = 1$ und $12^2 = 144$ ***f)*** $\frac{3}{2}$, da $3^3 = 27$ und $2^3 = 8$

2.14 ***a)*** $\sqrt{121} = 11$ ***c)*** $\sqrt[4]{625} = 5$ ***e)*** $\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) $\sqrt[6]{64} = 2$ ***d)*** $\sqrt[3]{-27} = -3$ ***f)*** $\sqrt[4]{625} = 5$

2.15 ***a)*** $\sqrt[4]{k^3}$ ***b)*** $\sqrt[h]{b^g}$ ***c)*** $\sqrt{a+1}$ ***d)*** $\frac{1}{\sqrt[w]{(x-c)^2}}$ ***e)*** $\frac{1}{\sqrt[b]{(a+b)^a}}$ ***f)*** $\frac{1}{\sqrt[d]{(v-w)^c}}$

2.16 ***a)*** $f^{\frac{3}{4}}$ ***b)*** $(a-b)^{\frac{1}{5}}$ ***c)*** $(x+y)^{\frac{4}{3}}$ ***d)*** $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ ***e)*** $\frac{1}{a^{\frac{3}{7}}}$ ***f)*** $\frac{1}{(r+s)^{\frac{1}{2}}}$

2.17

a) Da $30^2 = 900$ und $35^2 = 1\,225$ ist, muss $\sqrt{1\,000}$ näher bei 30 liegen, zB bei 32 mit $32^2 = 1\,024$.

b) Da $100^3 = 1\,000\,000$ und $200^3 = 8\,000\,000$ ist, muss $\sqrt[3]{2\,000\,000}$ näher bei 100 liegen, zB bei 125 mit $125^3 = 1\,953\,125$.

c) Da $9^3 = 729$ und $10^3 = 1\,000$ ist, muss gelten $9 < \sqrt[3]{900} < 10$. Der geschätzte Wert für $\sqrt[3]{900}$ ist 9,5.

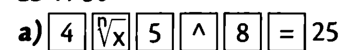
d) Da $4^4 = 256$ und $5^4 = 625$ ist, muss gelten $4 < \sqrt[4]{400} < 5$. Der geschätzte Wert für $\sqrt[4]{400}$ ist 4,5.

e) Da $4^4 = 256$ und $5^4 = 625$ ist, muss $\sqrt[4]{293}$ näher bei 4 liegen, zB bei 4,1 mit $4{,}1^4 = 282{,}5761$.

f) Da $3^5 = 243$ und $4^5 = 1\,024$ ist, muss $\sqrt[5]{275}$ näher bei 3 liegen, zB bei 3,1 mit $3{,}1^5 = 286{,}29151$.

2.18 ***a)*** $\sqrt{3}$ ***b)*** $\sqrt[3]{5^5}$ ***c)*** $\sqrt[4]{x}$ ***d)*** $\sqrt[3]{4^4}$ ***e)*** $\sqrt[3]{6^2}$ ***f)*** $\sqrt[7]{7^6}$

2.19 zB TI-30



a) $\boxed{4}\,\boxed{\sqrt[n]{x}}\,\boxed{5}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{8}\,\boxed{=}$ 25

b) $\boxed{3}\,\boxed{\sqrt[n]{x}}\,\boxed{2}\,\boxed{=}$ 1,259...

c) $\boxed{3}\,\boxed{\sqrt[n]{x}}\,\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{2}\,\boxed{=}$ 0,793...

d) $\boxed{\sqrt{\ }}\,\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{3}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{7}\,\boxed{=}$ 0,021...

e) $\boxed{\sqrt{\ }}\,\boxed{5}\,\boxed{=}$ 2,236...

f) $\boxed{4}\,\boxed{\sqrt[n]{x}}\,\boxed{3}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$ 2,279...

g) $\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{\sqrt{\ }}\,\boxed{5}\,\boxed{=}$ 0,447...

h) $\boxed{1}\,\boxed{\div}\,\boxed{6}\,\boxed{\sqrt[n]{x}}\,\boxed{7}\,\boxed{\wedge}\,\boxed{5}\,\boxed{=}$ 0,249...

2.20 Durch das Erweitern im dritten Umformungsschritt wird der Radikand im fünften Umformungsschritt quadriert und ändert dabei sein Vorzeichen. Der dritte Umformungsschritt ist daher nicht zulässig.

2.21 $\sqrt{678\,976} = 824$, $\sqrt[3]{50\,653} = 37$
Es werden individuell zu erstellende Anleitungen verlangt.

2.27 Bei negativen Exponenten: Basis $\neq 0$. Bei gebrochenen Exponenten: Ist der Nenner des Exponenten gerade, darf die Basis nicht negativ sein.

2.28 ***a)*** $\sqrt[n]{a^r}\cdot\sqrt[m]{a^s} = a^{\frac{r}{n}}\cdot a^{\frac{s}{m}} = a^{\frac{r}{n}+\frac{s}{m}} = a^{\frac{r\cdot m+s\cdot n}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{r\cdot m+s\cdot n}}$

b) $\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[n]{a^s}} = \frac{a^{\frac{r}{m}}}{a^{\frac{s}{n}}} = a^{\frac{r}{m}}\cdot a^{-\frac{s}{n}} = \sqrt[m]{a^r}\cdot\sqrt[n]{a^{-s}} = a^{\frac{r}{m}+\left(-\frac{s}{n}\right)} = a^{\frac{r}{m}-\frac{s}{n}} = a^{\frac{r\cdot n-s\cdot m}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{r\cdot n-s\cdot m}}$

2.29 ***a)*** $2\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ ***b)*** $3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ***c)*** $7\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}$
d) Dieser Ausdruck lässt sich nicht vereinfachen, da alle drei Radikanden verschieden sind.

2.30 ***a)*** $(a^2-a)\cdot\sqrt{2b}$
b) Dieser Ausdruck lässt sich nicht vereinfachen, da alle drei Radikanden verschieden sind.

2.31 ***1), 2)*** Gleich die Wurzeln berechnen, da beide Radikanden Quadratzahlen sind.
3) Zuerst mit gemeinsamem Wurzelzeichen anschreiben und die Division ausführen. Der Quotient ist eine Quadratzahl, die Wurzel kann gezogen werden.
4) Mit gemeinsamem Wurzelzeichen anschreiben und die Division ausführen.

2.32 ***a)*** $\sqrt[4]{10}$ ***b)*** $\sqrt[3]{6}$ ***c)*** $2\cdot\sqrt{10}$ ***d)*** $2\cdot\sqrt{2}$

2.33 ***a)*** $\sqrt[28]{4^{11}}$ ***b)*** $\sqrt[55]{27^{16}}$ ***c)*** $\sqrt[8]{a^5b^{10}}$ ***d)*** $\sqrt[60]{x^{34}y^{51}}$

2.34 ***a)*** $\frac{1}{\sqrt[24]{18}}$ ***b)*** $\sqrt[170]{2^7}$ ***c)*** $\frac{1}{\sqrt[12]{b^2c}}$ ***d)*** $\frac{1}{\sqrt[6]{u^4v^5}}$

2.35 ***a)*** $(8-2\cdot\sqrt{2})\cdot\sqrt{a}$ ***b)*** 0

2.37 $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \sqrt{10^{-2}} = 0{,}1 = \frac{1}{10}$

2.38 ***1)*** und ***2)*** lassen sich nicht allgemein beantworten, da die Ergebnisse je nach verwendeter Technologie unterschiedlich sind.

2.39 ***a)*** $\sqrt[6]{x^7}$ ***b)*** $\sqrt[4]{x}$ ***c)*** $\sqrt[6]{x^{13}}$ ***d)*** $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ ***e)*** $\sqrt[15]{x^{34}}$ ***f)*** $\sqrt[12]{x^5}$ ***g)*** $\sqrt{x^3}$ ***h)*** $\frac{1}{\sqrt[15]{x^{17}}}$

2.40 ***a)*** a ***b)*** $\sqrt[5]{a^2}$ ***c)*** $\sqrt{2ab^2}$ ***d)*** $\sqrt[10]{8^7\cdot x^{14}y^{21}}$

2.41 Die Wurzel eines Bruchs ist die Wurzel des Zählers dividiert durch die Wurzel des Nenners.
Die sechste Wurzel aus eins ist eins.

2.42 – 2.57

2.42 Die m-te Wurzel der n-ten Wurzel von a kann auf die (m · n)-te Wurzel von a umgeformt werden und auch auf die n-te Wurzel der m-ten Wurzel von a.

2.43 ***a)*** $\sqrt[6]{a}$ ***b)*** $\sqrt[6]{64}$ ***c)*** $\sqrt[21]{M}$ ***d)*** $\sqrt[4]{13}$ ***e)*** $\sqrt[10]{26}$ ***f)*** $\sqrt[20]{A}$

2.44 –

2.45 ***a)*** $\sqrt{29}$ ***b)*** $\sqrt[10]{800}$ ***c)*** $\sqrt{2}$ ***d)*** $\sqrt[15]{10}$

2.46 ***a)*** $\sqrt[4]{a}$ ***b)*** $\sqrt[8]{32a}$ ***c)*** $\sqrt[3]{x^2}$ ***d)*** $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$

2.47 ***a)*** $3 \cdot \sqrt{10}$ ***c)*** $4 \cdot \sqrt{7}$ ***e)*** $27 \cdot \sqrt{2}$ ***g)*** $3 \cdot \sqrt{7}$ ***i)*** $5 \cdot \sqrt{6}$ ***k)*** $7 \cdot \sqrt{3}$
b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ ***d)*** $3 \cdot \sqrt[4]{8}$ ***f)*** $3 \cdot \sqrt[5]{18}$ ***h)*** $2 \cdot \sqrt[3]{28}$ ***j)*** $2 \cdot \sqrt[5]{12}$ ***l)*** $2 \cdot \sqrt[4]{12}$

2.48 ***1) a)*** $n \cdot r \cdot s^2 \cdot \sqrt{r \cdot t}$ ***c)*** $2 \cdot c^3 \cdot d^{10} \cdot \sqrt{5 \cdot c \cdot d}$ ***e)*** $2 \cdot y^9 \cdot z^5 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot x \cdot z^2}$
b) $3 \cdot p \cdot q \cdot r^2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot p \cdot q^2}$ ***d)*** $2 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^6 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot b \cdot c^3}$ ***f)*** $3 \cdot u \cdot v^8 \cdot w^4 \cdot \sqrt{3v}$

2) und ***3)*** lassen sich nicht allgemein beantworten, da die Ergebnisse je nach verwendeter Technologie unterschiedlich sind.

2.49 ***a)*** $\sqrt{80}$ ***b)*** $\sqrt[3]{56}$ ***c)*** $\sqrt[4]{162}$ ***d)*** $\sqrt[5]{64}$ ***e)*** $\sqrt[6]{5^8}$ ***f)*** $\sqrt[4]{4^7}$

2.50 ***a)*** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ***b)*** $\sqrt[3]{\frac{1}{256}}$ ***c)*** $\sqrt[3]{2}$ ***d)*** $\sqrt[4]{\frac{4}{125}}$ ***e)*** $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ ***f)*** $\sqrt{\frac{1}{5}}$

2.51 ***a)*** $\sqrt{x^3}$ ***b)*** $\sqrt{x}$ ***c)*** $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ***d)*** $\sqrt{x}$ ***e)*** $\sqrt[4]{x^5}$ ***f)*** $\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$

2.52 ***a)*** $\sqrt[3]{\frac{1}{c^4}}$ ***b)*** $\sqrt{\frac{w}{v^7}}$ ***c)*** $\sqrt[3]{\frac{m^4}{n^2}}$ ***d)*** $\sqrt[5]{\frac{a^7}{b^3}}$ ***e)*** $\sqrt{\frac{b^3}{f}}$ ***f)*** $\sqrt[4]{\frac{s^7}{r^9}}$

2.53 ***a)*** $\sqrt{x^3 + x^2y}$ ***c)*** $\sqrt[3]{x^2 \cdot (x-1)^3}$ ***e)*** $\sqrt{x^2 - y^2}$
b) $\sqrt{x^3 + 2x^2y + xy^2}$ ***d)*** $\sqrt{128 \cdot (a-1)^3 \cdot (a+1)}$

2.54 Das Ergebnis ist 2.
1. Schritt: Den vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel bringen.
2. Schritt: Berechnen des Radikanden durch Ausmultiplizieren.
3. Schritt: Berechnen der dritten Wurzel.
Eintippen der Rechnung in einen normalen Taschenrechner ergibt ebenfalls das Ergebnis 2.

2.55 ***a)*** $\sqrt{2}$ ***c)*** $\sqrt{11}$ ***e)*** $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ***g)*** $5 \cdot \sqrt{5}$ ***i)*** $2 \cdot \sqrt{2}$ ***k)*** $\frac{\sqrt{10}}{10}$
b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ ***d)*** $\sqrt[5]{4}$ ***f)*** $\sqrt{3}$ ***h)*** $\frac{9 \cdot \sqrt[3]{25}}{2}$ ***j)*** $\frac{12 \cdot \sqrt[4]{2}}{7}$ ***l)*** $\frac{24 \cdot \sqrt[7]{243}}{5}$

2.56 ***1) a)*** $\frac{\sqrt{y}}{a}$ ***b)*** $r^2 \cdot \sqrt[3]{r}$ ***c)*** $2d^3 \cdot \sqrt[8]{(2d)^7}$ ***d)*** $\frac{5 \cdot \sqrt[5]{81 \cdot c^3}}{2}$ ***e)*** $\frac{n \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{m^2}}{m^2}$ ***f)*** $w^2 \cdot \sqrt[7]{v^5w^4}$

2) und ***3)*** lassen sich nicht allgemein beantworten, da die Ergebnisse je nach verwendeter Technologie unterschiedlich sind.

2.57 ***1) a)*** $\frac{\sqrt{6}+1}{5}$ ***b)*** $\sqrt{7} + 2$ ***c)*** $\frac{5 \cdot \sqrt{10} - 5}{9}$ ***d)*** $12 \cdot \sqrt{5} + 10 \cdot \sqrt{2}$ ***e)*** $6 \cdot \sqrt{6} - 8$ ***f)*** $3 \cdot \sqrt{2} + 3$

2) und ***3)*** lassen sich nicht allgemein beantworten, da die Ergebnisse je nach verwendeter Technologie unterschiedlich sind.

2.58 ***1)*** ***a)*** $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$

c) $\frac{\sqrt{1+a} - 1}{a}$

d) $\frac{a^2 - ab + a \cdot \sqrt{b} - b \cdot \sqrt{b}}{a^2 - b}$

e) $\frac{a^2 \cdot \sqrt{b} + ab \cdot \sqrt{a} + ab \cdot \sqrt{b} + b^2 \cdot \sqrt{a}}{ab^2 - a^2b}$

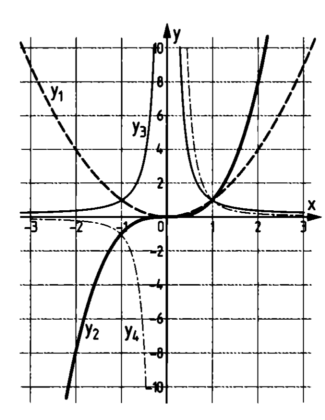
f) $\frac{a \cdot \sqrt{a} - ab + b \cdot \sqrt{a} - b^2}{a - b^2}$

2) und ***3)*** lassen sich nicht allgemein beantworten, da die Ergebnisse je nach verwendeter Technologie unterschiedlich sind.

2.59 ***2)*** ***A)*** $\frac{1{,}4142 + \sqrt{2}}{1{,}4142^2 - 2}$ ***B)*** $\frac{2{,}236 + \sqrt{5}}{5 - 2{,}236^2}$

1), ***2)*** und ***3)*** lassen sich nicht allgemein beantworten, da die Ergebnisse je nach verwendeter Technologie unterschiedlich sind.

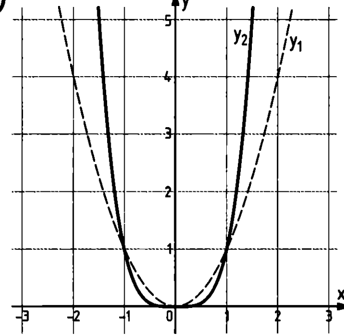
2.60



1) y_1 und y_3

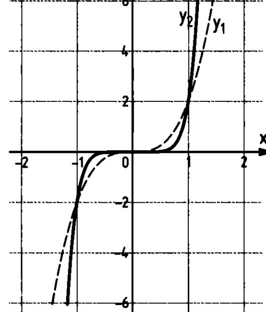
2) y_3 und y_4. Einsetzen von null ergibt eine Division durch null. Diese ist nicht definiert.

2.62 ***a)***



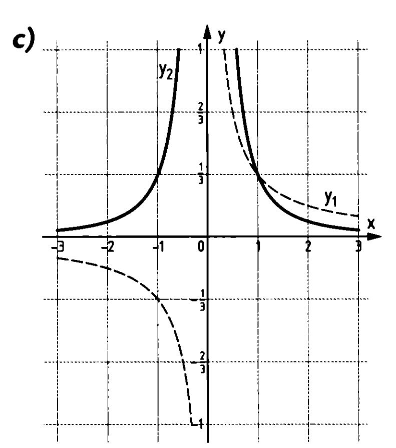
Für $0 < |x| < 1$ wird der Graph in y-Richtung gestaucht, für $|x| > 1$ wird der Graph in y-Richtung gestreckt. Aus der Parabel 2. Ordnung wird eine Parabel 4. Ordnung mit demselben Scheitel.

b)



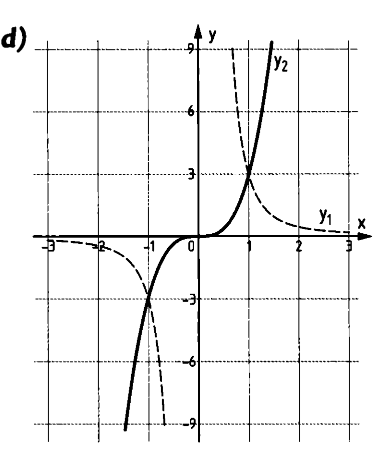
Für $0 < |x| < 1$ wird der Graph in y-Richtung gestaucht, für $|x| > 1$ wird der Graph in y-Richtung gestreckt. Aus der Parabel 3. Ordnung wird eine Parabel 7. Ordnung mit demselben Scheitel.

c)



Für $0 < |x| < 1$ wird der Graph in y-Richtung gestreckt, für $|x| > 1$ wird der Graph in y-Richtung gestaucht. Für $x < 0$ wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt. Aus einer Hyperbel 1. Ordnung wird eine Hyperbel 2. Ordnung mit derselben Polstelle.

d)



Aus einer Hyperbel 3. Ordnung wird eine Parabel 3. Ordnung. Die x-Koordinate des Scheitels von y_2 ist die Polstelle von y_1.

2.63 a)

x	x^2	$3x^2$
−3	9	27
−2,5	6,25	18,75
−2	4	12
−1,5	2,25	6,75
−1	1	3
−0,5	0,25	0,75
0	0	0
0,5	0,25	0,75
1	1	3
1,5	2,25	6,75
2	4	12
2,5	6,25	18,75
3	9	27

Der Graph wird in y-Richtung gestreckt.

b)

x	x^3	$-0,2x^3$
−3	−27	5,4
−2,5	−15,625	3,125
−2	−8	1,6
−1,5	−3,375	0,675
−1	−1	0,2
−0,5	−0,125	0,025
0	0	0
0,5	0,125	−0,025
1	1	−0,2
1,5	3,375	−0,675
2	8	−1,6
2,5	15,625	−3,125
3	27	−5,4

Der Graph wird in y-Richtung gestaucht und an der x-Achse gespiegelt.

c)

x	x^{-2}	$2x^{-2}$
−3	$0,\dot{1}$	$0,\dot{2}$
−2,5	0,16	0,32
−2	0,25	0,5
−1,5	$0,\dot{4}$	$0,\dot{8}$
−1	1	2
−0,5	4	8
0	–	–
0,5	4	8
1	1	2
1,5	$0,\dot{4}$	$0,\dot{8}$
2	0,25	0,5
2,5	0,16	0,32
3	$0,\dot{1}$	$0,\dot{2}$

Der Graph wird in y-Richtung gestreckt.

d)

x	x^{-3}	$0,5x^{-3}$
−3	−0,037...	−0,018...
−2,5	−0,064	−0,032
−2	−0,125	−0,0625
−1,5	−0,296...	−0,148...
−1	−1	−0,5
−0,5	−8	−4
0	nicht def.	nicht def.
0,5	8	4
1	1	0,5
1,5	0,296...	0,148...
2	0,125	0,0625
2,5	0,064	0,032
3	0,037...	0,018...

Der Graph wird in y-Richtung gestaucht.

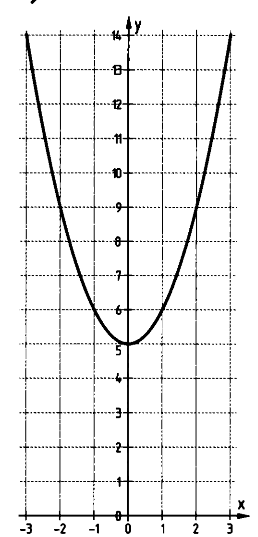
2.64 y_3: C; y_5: E

A: $y = -\frac{1}{2}x^2$; B: $y = 2x^3$; D: $y = \frac{3}{x^2}$; F: $y = -\frac{1}{x^3}$

Auf die grafischen Darstellungen wird verzichtet.

2.65

a)

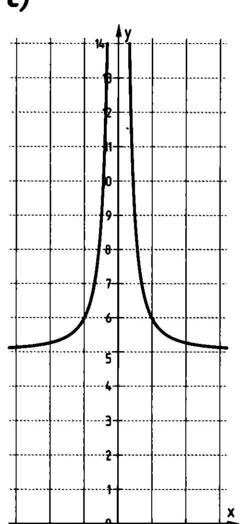


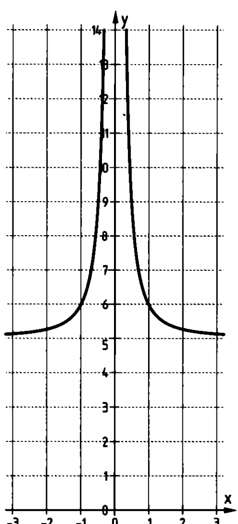
Der Graph ist eine Parabel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^2$ ist der Graph um 5 Einheiten nach oben verschoben.

b)

Der Graph ist eine Parabel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^3$ ist der Graph um 5 Einheiten nach unten verschoben.

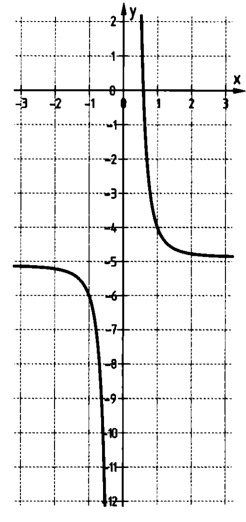
c)





Der Graph ist eine Hyperbel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-2}$ ist der Graph um 5 Einheiten nach oben verschoben.

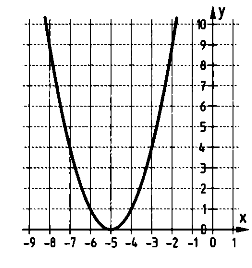
d)



Der Graph ist eine Hyperbel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-3}$ ist der Graph um 5 Einheiten nach unten verschoben.

2.66

a)

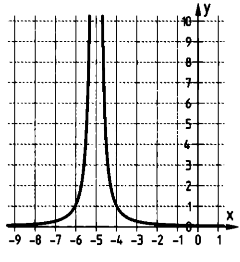


Der Graph ist eine Parabel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^2$ ist der Graph um 5 Einheiten nach links verschoben.

b)

Der Graph ist eine Parabel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^3$ ist der Graph um 5 Einheiten nach rechts verschoben.

c)

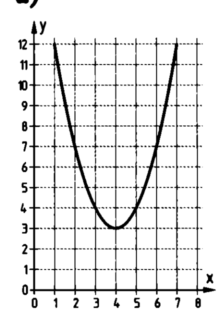


Der Graph ist eine Hyperbel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-2}$ ist der Graph um 5 Einheiten nach links verschoben.

d)

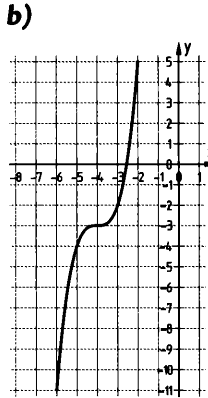
Der Graph ist eine Hyperbel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-3}$ ist der Graph um 5 Einheiten nach rechts verschoben.

2.67 **a)**



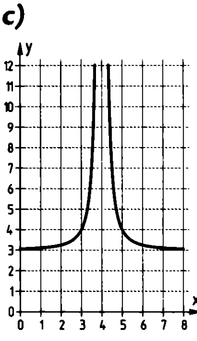
Der Graph ist eine Parabel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^2$ ist der Graph um 4 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach oben verschoben.

b)



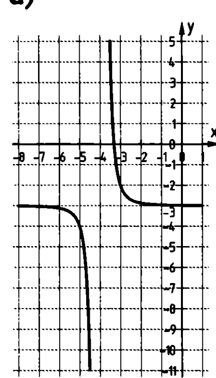
Der Graph ist eine Parabel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^3$ ist der Graph um 4 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben.

c)



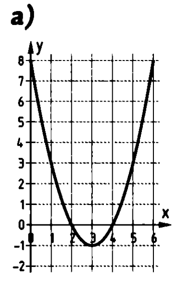
Der Graph ist eine Hyperbel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-2}$ ist der Graph um 4 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach oben verschoben.

d)



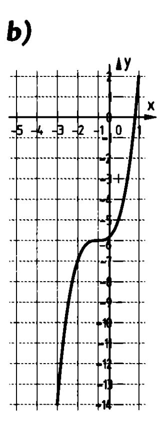
Der Graph ist eine Hyperbel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-3}$ ist der Graph um 4 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben.

2.68 **a)**



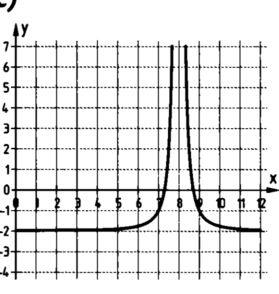
Der Graph ist eine Parabel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^2$ ist der Graph um 3 Einheiten nach rechts und um 1 Einheit nach unten verschoben.

b)



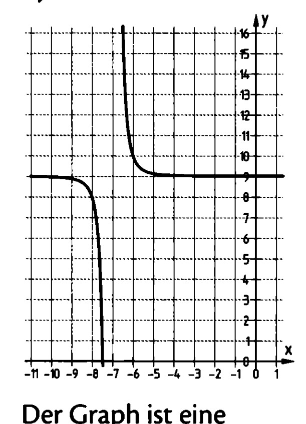
Der Graph ist eine Parabel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^3$ ist der Graph um 1 Einheit nach links und um 6 Einheiten nach unten verschoben.

c)



Der Graph ist eine Hyperbel 2. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-2}$ ist der Graph um 8 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach unten verschoben.

d)



Der Graph ist eine Hyperbel 3. Ordnung. Verglichen mit dem Graph der Funktion $y = x^{-3}$ ist der Graph um 7 Einheiten nach links und um 9 Einheiten nach oben verschoben.

2.69 **a)** $y_1 = -(x + 5)^2 + 4$, $y_2 = x^5 + 2$ **b)** $y_1 = (x - 2)^{-3} + 2$, $y_2 = x^{-2} + 1$

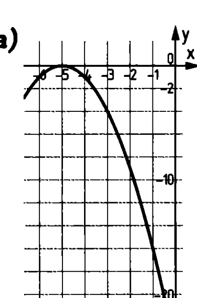
2.70 **a)** y_1: A; y_2: C; y_3: D; B: $y = x^2$; E: $y = -3x^2$
b) y_1: A; y_2: C; B: $y = x^3$; D: $y = -2x^3$; E: $y = -x^3$

2.71 rot: Der Graph ist im Intervall]−∞; −1,8[und im Intervall]0,5; ∞[streng monoton steigend und im Intervall]−1,8; 0,5[streng monoton fallend. Er hat im Punkt (−1,8|2) ein Maximum und im Punkt (0,5|−4,9) ein Minimum. Bei $x \approx -2{,}6$, bei $x = -1$ und bei $x \approx 1{,}6$ hat der Graph jeweils eine Nullstelle.

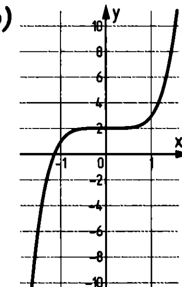
blau: Der Graph hat an der Stelle $x = 0$ eine Polstelle. Die Gerade $y = -5$ ist Asymptote. Der Graph ist im Intervall]−∞; 0[streng monoton steigend und im Intervall]0; ∞[streng monoton fallend. Bei $x \approx -0{,}4$ und bei $x \approx 0{,}4$ hat der Graph jeweils eine Nullstelle.

grün: Der Graph ist im gesamten Verlauf streng monoton steigend und hat im Punkt (−5|0) eine Nullstelle. Dieser Punkt ist auch der Scheitel der Kurve.

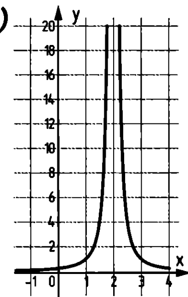
2.72 ***a)***



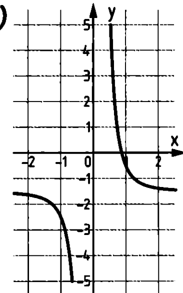
b)



c)



d)

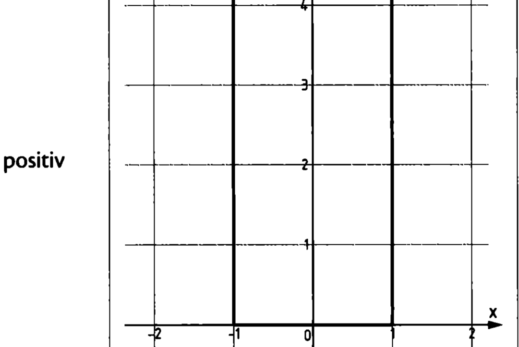
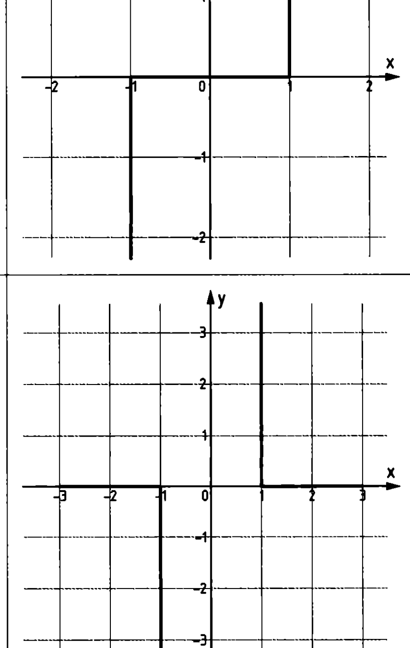
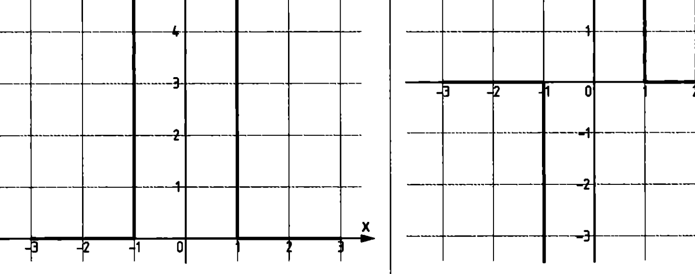


2.73 ***1)***

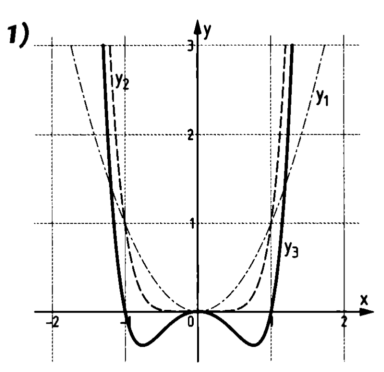
n	gerade	ungerade
positiv	(−1|1), (0|0), (1|1)	(−1|−1), (0|0), (1|1)
negativ	(−1|1), (1|1)	(−1|−1), (1|1)

n = 0: (−1|1), (1|1)

2)

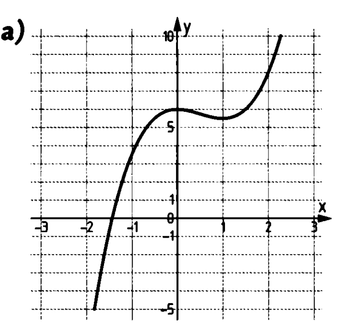
n	gerade	ungerade
positiv		
negativ		

2.74 ***1)***



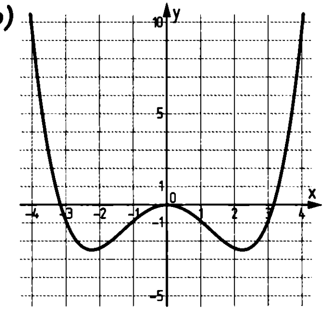
2) Der Graph der Funktion y_3 hat einen völlig anderen Verlauf als die Graphen der Funktionen y_1 und y_2. Er hat drei Extremwerte und drei Nullstellen.

2.75 ***a)***



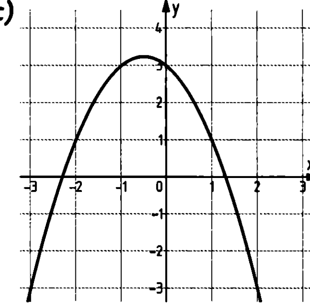
eine Nullstelle bei $x \approx -1{,}4$

b)



drei Nullstellen, $x_1 \approx -3{,}2$, $x_2 = 0$, $x_3 \approx 3{,}2$

c)



zwei Nullstellen, $x_1 \approx -2{,}3$, $x_2 \approx 1{,}3$

2.76 ***1)*** Polynomfunktion ***2)*** Polynomfunktion ***3)*** Potenzfunktion

2.77 ***1)*** y_1: n ist mindestens fünf, da der Graph $n - 1 = 4$ Extremstellen hat.
y_2: n ist mindestens vier, da der Graph $n - 1 = 3$ Extremstellen hat.
y_3: n ist mindestens drei, da der Graph $n - 1 = 2$ Extremstellen hat.

2) y_1: Der Graph hat eine Nullstelle zwischen $x = -5$ und $x = -4$, die zugleich ein Maximum ist. Der Graph hat eine weitere Nullstelle bei $x = 0$. Der Graph hat eine dritte Nullstelle zwischen $x = 4$ und $x = 5$, die zugleich ein Minimum ist. Der Graph hat einen weiteres Minimum bei $x = -2$ und ein weiteres Maximum bei $x = 2$. Der Graph ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Der Graph ist zunächst monoton steigend, danach monoton fallend, im Bereich des Koordinatenursprungs monoton steigend, danach erneut monoton fallend und schließlich monoton steigend.

y_2: Der Graph hat Nullstellen bei $x = -4$ und bei $x = 4$. Der Graph hat jeweils ein Minimum zwischen $x = -3$ und $x = -2$ bzw. zwischen $x = 2$ und $x = 3$. Der Graph hat ein Maximum bei $x = 0$. Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. Der Graph ist zunächst monoton fallend, danach monoton steigend, dann erneut monoton fallend und schließlich monoton steigend.

y_3: Der Graph hat eine Nullstelle zwischen $x = -2$ und $x = -1$, ein Maximum bei $x = 0$ und ein Minimum bei $x = 3$. Der Graph ist nicht symmetrisch. Der Graph ist zunächst monoton steigend, danach monoton fallend und schließlich monoton steigend.

2.78 ***1)*** Der Graph wird an der x-Achse gespiegelt.
2) Zu y_5 und y_6:
Der Graph wird stark verändert. y_5 hat einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt, y_6 hat keine Extrempunkte. y_5 ist streng monoton steigend, dann streng monoton fallend und schließlich wieder streng monoton steigend, y_6 ist streng monoton fallend. Im Bereich des Koordinatenursprungs ist der Verlauf der beiden Graphen ähnlich. Beide Funktionen sind ungerade.
Zu y_7 und y_8:
Der Graph wird stark verändert. y_7 hat nur einen Tiefpunkt im Koordinatenursprung, y_8 hat zusätzlich zwei Hochpunkte. y_7 ist streng monoton fallend für $x < 0$ und streng monoton steigend für $x > 0$. y_8 ist streng monoton steigend, streng monoton fallend, streng monoton steigend und schließlich streng monoton fallend. Im Bereich des Koordinatenursprungs ist der Verlauf der beiden Graphen ähnlich. Beide Funktionen sind gerade.

2.79 ***1)*** A. Die Graphen von B und C gehen nicht durch den Punkt $N_2(0|0)$.
2) B. Die Graphen von A und C haben mindestens zwei Minima und mindestens zwei Maxima.
3) Keiner. Alle drei Graphen sind zuerst streng monoton fallend.

2.80 Der Grad der Funktion ist $n = 3$, also ungerade, daher muss es mindestens eine Nullstelle geben. Da $y(-2) = -15$ kleiner als null und $y(0) = 5$ größer als null ist, und da die Funktion keine Polstellen und keine Definitionslücken hat, muss sie zwischen $x = -2$ und $x = 0$ eine Nullstelle haben.

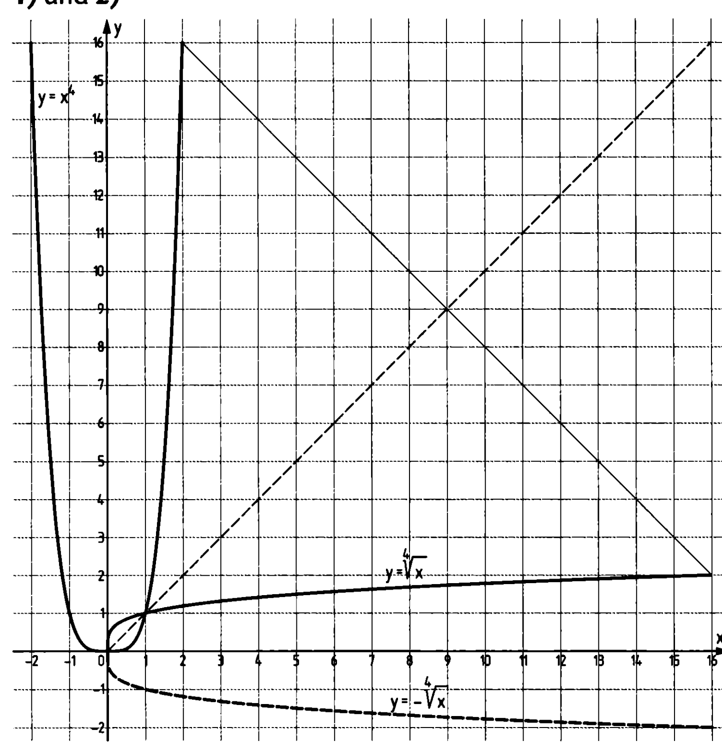
2.81 Der Grad der Funktion ist $n = 4$, also gerade, daher muss es keine Nullstelle geben. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^4 \geq 0$ und $x^2 \geq 0$. Daraus folgt, dass $y = x^4 + x^2 + 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ größer oder gleich eins ist. Der gesamte Graph liegt daher im ersten und im zweiten Quadranten und schneidet oder berührt die x-Achse nicht.

2.82 $n = 3$: Die Polynomfunktion ist vom Grad 3, sie kann höchstens drei Nullstellen haben. Da n ungerade ist, muss die Funktion mindestens eine Nullstelle haben.
$n = 4$: Die Polynomfunktion ist vom Grad 4, sie kann höchstens vier Nullstellen haben. Da n gerade ist, muss die Funktion keine Nullstelle haben.

2.83 Zum Beispiel haben die Funktionswerte von $f(x) = x^4 - 2x^2$ für $x > 1$ und für $x < -1$ jeweils gleiches Vorzeichen und daher verschiedenes Monotonieverhalten. Es muss daher im Intervall $[-1; 1]$ mindestens eine Extremstelle liegen. Analoge Überlegungen gelten für alle Polynomfunktionen n-ten Grads, wenn n gerade ist. Die Funktionswerte haben für sehr kleine und für sehr große x-Werte gleiches Vorzeichen.

2.84 Zum Beispiel haben die Funktionswerte von $f(x) = x^5 - 5x$ für $x > 1$ und für $x < -1$ jeweils verschiedenes Vorzeichen und daher gleiches Monotonieverhalten. Es muss daher im Intervall $[-1; 1]$ nicht notwendig eine Extremstelle liegen. Analoge Überlegungen gelten für alle Polynomfunktionen n-ten Grads, wenn n ungerade ist. Die Funktionswerte haben für sehr kleine und für sehr große x-Werte verschiedenes Vorzeichen.

2.85 ***1)*** und ***2)***

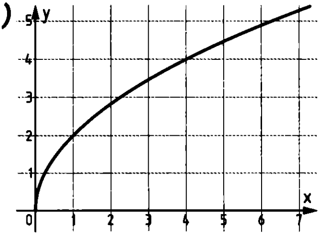


3) Die Zuordnung, die der gespiegelte Graph darstellt, ist keine Funktion.

2.86 ***1)*** $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$ ***2)*** $a = \sqrt[3]{V}$

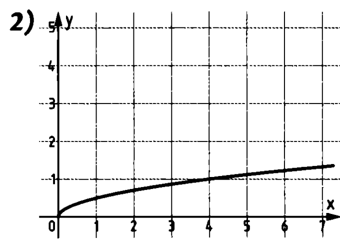
2.87 Die Funktion beschreibt den Radius r in Abhängigkeit vom Volumen V.
$r(V) = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

2.88 ***1)***



Die Funktionswerte sind doppelt so groß.

2)

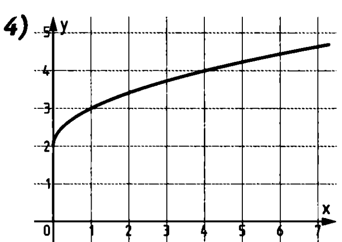


Die Funktionswerte sind halb so groß.

3)

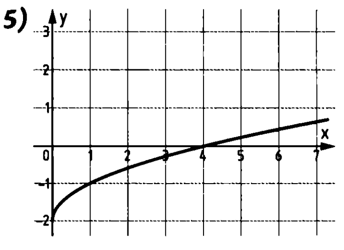
Die Funktionswerte betragen das $\sqrt{2}$-Fache.

4)



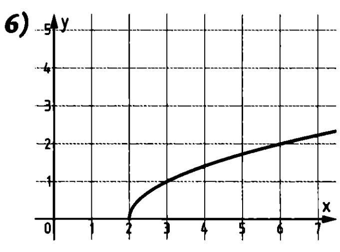
Der Graph ist um zwei nach oben verschoben.

5)



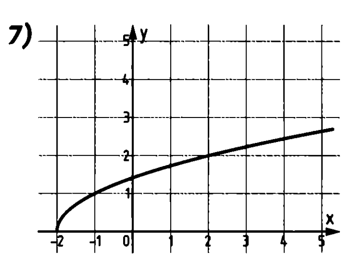
Der Graph ist um zwei nach unten verschoben.

6)



Der Graph ist um zwei nach rechts verschoben.

7)



Der Graph ist um zwei nach links verschoben.

2.89 $y_1 \rightarrow B$, $y_2 \rightarrow D$, $y_3 \rightarrow C$, $y_4 \rightarrow A$, $y_5 \rightarrow E$
Zu jeder Gleichung passt ein Graph und umgekehrt.

2.90 und **2.91**: Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

2.90 ***a)*** $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}_0^-;\ f^{-1}: y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$ ***e)*** $D = [2; \infty[;\ f^{-1}: y = \sqrt{x} + 2$

b) $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$ ***d)*** $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt{2x}$

2.91 ***a)*** $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt[3]{-\frac{x}{3}}$ ***e)*** $D = [-4; \infty[;\ f^{-1}: y = \sqrt[3]{x} - 4$

b) $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt[3]{2x + 4}$ ***d)*** $D = \mathbb{R}_0^+;\ f^{-1}: y = \sqrt[3]{4x}$

2.92 ***a)*** $O = 6 \cdot \sqrt[3]{V^2}$ ***b)*** $V = \sqrt{\frac{O^3}{216}}$

2.93 ***1)*** $s(V) = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$

2) r(M) beschreibt den Radius des gleichseitigen Kegels in Abhängigkeit von der Größe des Kegelmantels.
$r(M) = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \sqrt{\frac{M}{\pi}}$

2.94 ***1)*** $A(V) = \sqrt[3]{V^2}$

2) Der Seitenflächeninhalt wird auf das $\sqrt[3]{4}$-Fache vergrößert.

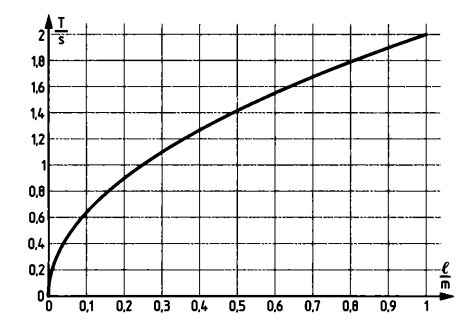
2.95 ***1)*** $r(V) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot V}$ ***2)*** $r(t) = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi} \frac{\ell}{\text{min}} \cdot t}$

2.96 ***1)*** $v(h) = \sqrt{2gh}$

2) v(h) beschreibt jene Geschwindigkeit, die notwendig ist, um eine Höhe von 140 Meter zu erreichen, wenn das Wasser auf der Höhe h austritt.



2.98



2.99 ***1)*** 2 ***2)*** durch Quadrieren ***3)*** ja
4) $x + 7 = 9 \Rightarrow x = 2$
Die Lösung der entstandenen Gleichung erfüllt die ursprüngliche Gleichung nicht.

2.100 ***1)*** $\sqrt{2x+1}$ ergibt einen positiven Wert oder null.
2) x^2 ist immer positiv $\Rightarrow -x^2$ ist immer negativ und die Wurzel kann nicht berechnet werden.
3) $\sqrt{x}$ ist kleiner als $\sqrt{x+3} \Rightarrow$ die Differenz ist kleiner null.

2.102 ***a)*** $D = \{k \in \mathbb{R} | k \geqslant 2\};\ L = \{38\}$
b) $D = \{m \in \mathbb{R} | m \geqslant 2\};\ L = \{34\}$
c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant \frac{4}{3}\right\};\ L = \left\{\frac{68}{3}\right\}$
d) $D = \{v \in \mathbb{R} | v \leqslant 15\};\ L = \{-34\}$
e) $D = \left\{t \in \mathbb{R} | t \geqslant \frac{7}{2}\right\};\ L = \{28\}$

2.103 ***a)*** $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant \frac{5}{3}\right\};\ x = \frac{14}{3}, L = \{\ \}$
b) $D = \left\{a \in \mathbb{R} | a \geqslant \frac{1}{3}\right\};\ a = \frac{10}{3}, L = \{\ \}$
c) $D = \left\{n \in \mathbb{R} | n \geqslant -\frac{1}{2}\right\};\ n = 12, L = \{\ \}$
d) $D = \left\{m \in \mathbb{R} | m \geqslant -\frac{2}{5}\right\};\ L = \left\{\frac{34}{5}\right\}$
e) $D = \left\{h \in \mathbb{R} | h \geqslant \frac{1}{2}\right\};\ L = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
f) $D = \left\{z \in \mathbb{R} | z \geqslant -\frac{1}{5}\right\};\ L = \left\{\frac{24}{5}\right\}$

2.104 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant -3\};\ L = \{6\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 2\};\ x = -\frac{38}{71}, L = \{\ \}$

2.105 ***a)*** $D = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{19}{8}\right\};\ L = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leqslant x \leqslant 22\};\ L = \{-2\}$

2.106 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 1\};\ x = -8, L = \{\ \}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant -2\};\ x = -7, L = \{\ \}$

2.107 ***a) 1)*** Der Faktor zwei wurde nicht quadriert. $x = 4 \cdot (3x - 4)$
2) Der Radikand wurde nicht in Klammern geschrieben. $x = 4 \cdot (3x - 4)$
b) 1) Es wurde aus einer Summe partiell die Wurzel gezogen. $\sqrt{x} + 4 = \sqrt{x+9}$
2) Auf der linken Seite wurde nur die Wurzel und nicht der gesamte Term quadriert.
$x + 8 \cdot \sqrt{x} + 16 = x + 9$

2.108 ***a)*** Richtig. Bei einem Produkt kann jeder Faktor einzeln quadriert werden.
b) Falsch. Summanden können nicht getrennt potenziert werden.
c) Falsch. Von Summanden kann nicht getrennt die Wurzel gezogen werden.
d) Falsch. Die Summanden müssen einzeln berechnet werden.
e) Richtig. Jeder der Faktoren wird mit –1 potenziert, dh. der Kehrwert gebildet.
f) Richtig. Von Zähler und Nenner kann getrennt die Wurzel gezogen werden.
g) Falsch. Von Minuend und Subtrahend kann nicht getrennt die Wurzel gezogen werden.
h) Richtig. Anwenden einer binomischen Formel liefert das angegebene Ergebnis.

2.109 ***a)*** x^9 ***b)*** $(ab)^2$ ***e)*** $\sqrt{\frac{r}{s}}$ ***f)*** $4 \cdot \sqrt{t}$ ***g)*** $\sqrt{cd}$
c), d) und ***h)*** Zusammenfassen nicht möglich, weil verschiedene Radikanden.

2.110 ***1)*** $a^{\frac{2}{3}}$ ***2)*** $a^{\frac{5}{2}}$ ***3)*** $a^{-\frac{3}{4}}$ ***4)*** $a^{-\frac{4}{5}}$

2.111 ***1)*** $\sqrt[4]{x}$ ***2)*** $\sqrt[3]{x^7}$ ***3)*** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ ***4)*** $\sqrt{x}$

2.112 ***a)*** 0 ***b)*** Kann nicht vereinfacht werden. ***c)*** $8 \cdot \sqrt[3]{9}$ ***d)*** Kann nicht vereinfacht werden.

2.113 ***a)*** $90 \cdot \sqrt{2} - 40 \cdot \sqrt{5}$ ***b)*** $8 \cdot \sqrt{2}$ ***c)*** $35 \cdot \sqrt{5}$

2.114 a) $24 \cdot \sqrt{3}$ **b)** -2 **c)** 5

2.115 a) $8 \cdot \sqrt{2}$ **b)** $-2 \cdot \sqrt[3]{9}$ **c)** $\sqrt[3]{3}$

2.116 a) $6a^2x^5 \cdot \sqrt{7ax}$ **b)** $15x^3z^2 \cdot \sqrt[3]{2x^2y^2z}$ **c)** $\frac{6a^2c^4}{5} \cdot \sqrt{2abc}$ **d)** $\frac{3x^3z^{22}}{4a} \cdot \sqrt[3]{y^2z^2}$

2.117 a) $\sqrt{3}$ **b)** 5

2.118 a) $9 - 6 \cdot \sqrt{2}$ **b)** $107 + 12 \cdot \sqrt{77}$ **c)** $128 - 24 \cdot \sqrt{15}$

2.119 a) $2 - \frac{f^3}{m^2} - \frac{m^2}{f^3}$ **b)** $\frac{2b}{a} - 4$

2.120 a) $\sqrt[6]{64}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{8}, \sqrt{\sqrt[3]{64}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64}$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = (64^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{4^3}} = \sqrt{4}$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{\sqrt{8^2}} = \sqrt[3]{8}$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = (64^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = (64^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{64}}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}}, \sqrt[6]{x^4}, \sqrt{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{x^4}$

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^4}}$

$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = x \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

2.121 ***1)*** $\sqrt{6 + \frac{6}{35}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{6}{35}}$

Die Struktur der beiden angegebenen Beispiele ist gleich. Im Nenner des Bruchs steht jeweils das um eins verminderte Quadrat des Zählers. Der erste Summand bzw. der Faktor vor der Wurzel und der Zähler des Bruchs sind gleich. Anwenden dieser Struktur mit 6 und $6^2 - 1 = 35$ ergibt ein weiteres Beispiel.

2) LS: $\sqrt{a + \frac{a}{a^2 - 1}} = \sqrt{\frac{a \cdot (a^2 - 1) + a}{a^2 - 1}} = \sqrt{\frac{a^3}{a^2 - 1}} = a \cdot \sqrt{\frac{a}{a^2 - 1}}$, RS: $a \cdot \sqrt{\frac{a}{a^2 - 1}}$, LS = RS

3) $\sqrt[3]{5 + \frac{5}{124}} = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{124}}$

2.122 a) $\sqrt{x}$ **b)** $\frac{\sqrt[12]{x^{11}}}{x}$ **c)** $x^4 \cdot \sqrt[3]{x}$ **d)** $\frac{\sqrt[6]{x^5}}{x}$ **e)** $\sqrt[20]{x^{11}}$

2.123 $\sqrt[5]{4a}$ **b)** $\sqrt[5]{9b}$ **c)** $\frac{xy \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$ **d)** $\frac{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}{R^2 + \omega^2L^2}$ **e)** $\frac{2 \cdot \sqrt{2 - f} + \sqrt{4 - f^2}}{2 - f}$

2.124 a) $2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{x}$ **c)** $\sqrt{mn}$ **e)** $2a \cdot \sqrt{a + b} - 2a \cdot \sqrt{a - b}$
b) $2 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{a}$ **d)** $\sqrt{30}$

2.125 bis **2.127**: Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

2.125 a) $y_g = -\frac{1}{2}x^2$ **b)** $y_g = -2x^3$ **c)** $y_g = -\frac{1}{4x^2}$ **d)** $y_g = -\frac{3}{x^3}$

2.126 a) $y_g = 2x^2$ **b)** $y_g = \frac{1}{2}x^3$ **c)** $y_g = \frac{4}{x^2}$ **d)** $y_g = \frac{1}{4x^3}$

2.127 a) y_2 verläuft flacher als y_1, y_3 steiler **c)** y_1 verläuft steiler als y_3, y_2 flacher
b) y_2 verläuft gleich steil wie y_1, y_3 flacher **d)** y_2 verläuft flacher als y_1, y_3 steiler

2.128 a) $S(-3|-5)$ **b)** $S(4|1)$ **c)** $S(1|-2)$

2.129 ***a)*** Blauer Graph: $a = -1, b = -3, c = 5, y = -(x + 3)^2 + 5$
Grüner Graph: $a = 1, b = 0, c = 2, y = x^2 + 2$
Roter Graph: $a = 1, b = 3, c = 1, y = (x - 3)^2 + 1$
b) Blauer Graph: $a = 1, b = -2, c = 2, y = (x + 2)^{-2} + 2$
Grüner Graph: $a = -1, b = 0, c = -2, y = -x^{-2} - 2$
Roter Graph: $a = -1, b = 4, c = 0, y = -(x - 4)^{-2}$

2.130 ***1)*** Symmetrisch zur y-Achse bedeutet $f(-x) = f(x)$ und daher für die angegebene Funktion $(-x)^{2n} = x^{2n}$. Das ist richtig, da 2n für $n \in \mathbb{Z}$ entweder null oder eine gerade ganze Zahl ist. Wird $(-x)$ damit potenziert, ist das Ergebnis positiv. Damit gilt LS = RS.
2) Punktsymmetrisch zum Ursprung bedeutet $f(-x) = -f(x)$ und daher für die angegebene Funktion $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$. Das ist richtig, da $2n + 1$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine ungerade ganze Zahl ist. Wird $(-x)$ damit potenziert, ist das Ergebnis negativ. Damit gilt LS = RS.

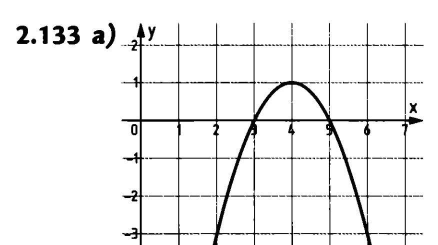
2.131 Der Graph der Funktion $y = x^1$, also $y = x$, ist eine Gerade. Die Funktion beschreibt die erste Mediane.

2.132 $f_1(x) = 1$ für $n = 0$. Potenzen mit dem Exponenten null haben immer den Wert eins. Da 0^0 nicht definiert ist, muss die Definitionsmenge hier auf $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eingeschränkt werden.
$f_1(x) \in \mathbb{R}$ für ungerade n. Beim Potenzieren mit einer ungeraden Zahl ändert sich das Vorzeichen nicht. Für $x > 0$ ist daher $f(x) > 0$ für $x < 0$ ist daher $f(x) < 0$.
$f_1(x) \in \mathbb{R}_0^+$ für gerade n. Beim Potenzieren mit einer geraden Zahl ist das Ergebnis immer positiv oder null. Für $x > 0$ und für $x < 0$ ist daher $f(x) > 0$.

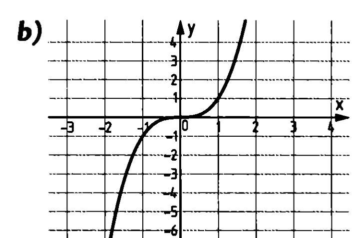
$f_2(x) = -1$ für $n = 0$. Potenzen mit dem Exponenten null haben immer den Wert eins. Das negative Vorzeichen wird nicht potenziert und bleibt daher erhalten. Da 0^0 nicht definiert ist, muss die Definitionsmenge hier auf $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eingeschränkt werden.
$f_2(x) \in \mathbb{R}$ für ungerade n. Beim Potenzieren mit einer ungeraden Zahl ändert sich das Vorzeichen nicht. Wegen des negativen Vorzeichens ist für $x > 0$ daher $f(x) < 0$, für $x < 0$ daher $f(x) > 0$.
$f_2(x) \in \mathbb{R}_0^-$ für gerade n. Beim Potenzieren mit einer geraden Zahl ist das Ergebnis immer positiv oder null. Wegen des negativen Vorzeichens ist für $x > 0$ und für $x < 0$ daher $f(x) < 0$.

$f_3(x) = 1$ für $n = 0$. Potenzen mit dem Exponenten null haben unabhängig vom Vorzeichen immer den Wert eins. Da 0^0 nicht definiert ist, muss die Definitionsmenge hier auf $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eingeschränkt werden.
$f_3(x) \in \mathbb{R}$ für ungerade n. Beim Potenzieren mit einer ungeraden Zahl ändert sich das Vorzeichen nicht. Wegen des negativen Vorzeichens ist für $x > 0$ daher $f(x) < 0$, für $x < 0$ daher $f(x) > 0$.
$f_3(x) \in \mathbb{R}_0^+$ für gerade n. Beim Potenzieren mit einer geraden Zahl ist das Ergebnis immer positiv oder null. Das negative Vorzeichen fällt beim Potenzieren mit einer geraden Zahl weg. Für $x > 0$ und für $x < 0$ ist daher $f(x) > 0$.

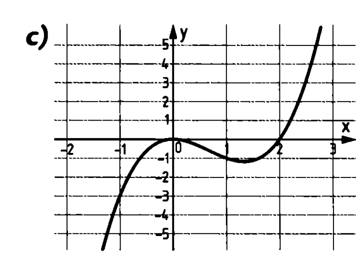
2.133 ***a)***



b)

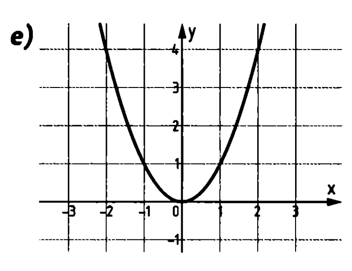


c)



d)

e)



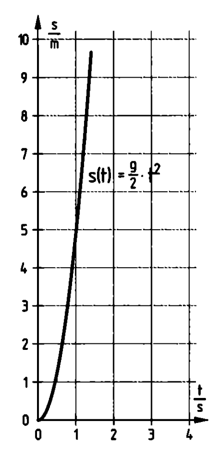
2.134 ***1)*** Falsch. Der Graph von $y = x^3$ hat genau eine Nullstelle.

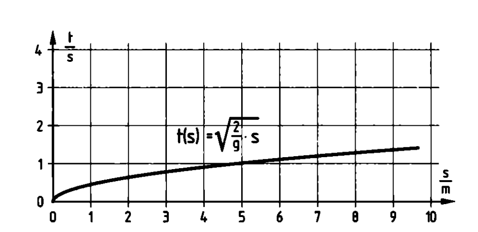
2) Falsch. Nur der Graph der Funktion $y = 0$ ist symmetrisch zur x-Achse. Alle anderen zur x-Achse symmetrischen Graphen sind Graphen von Relationen. Der Graph einer Polynomfunktion kann daher nicht symmetrisch zur x-Achse sein. Der Graph der Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

3) Falsch. Wegen $(x + 3)^{-2} = \frac{1}{(x+3)^2}$ ist die Funktion an der Stelle $x = -3$ nicht definiert.

4) Falsch. Der Graph von $y = x^{-4}$ ist eine Hyperbel mit der x-Achse ($y = 0$) und der y-Achse ($x = 0$) als Asymptoten.

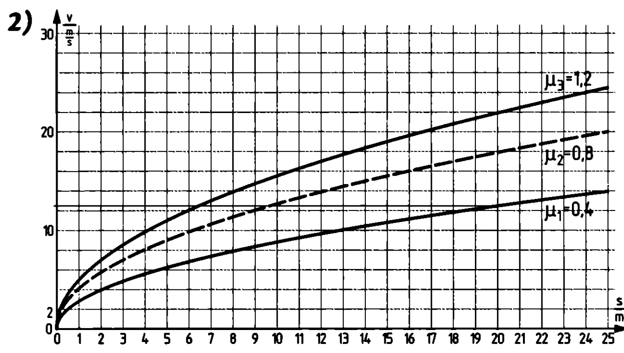
2.135 $t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}}$





2.136 ***1)*** $v(s) = \sqrt{2\mu g s}$

2)



3) Die Behauptung ist falsch. Der Fahrer ist mit 45,102... $\frac{km}{h}$ gefahren. „Schritttempo" entspricht einer Geschwindigkeit von 3,6 $\frac{km}{h}$.

2.137 – 2.140

2.137 **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} | (x \geqslant \sqrt{3}) \vee (x \leqslant -\sqrt{3})\}$; $L = \{2\}$

b) $D = \mathbb{R}$; $L = \{3\}$

c) $D = \mathbb{R}$; $L = \left\{-\frac{75}{18}\right\}$

2.138 **a)** $D = \mathbb{R}$; $L = \{0\}$ **b)** $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant -2\}$; $L = \{16\}$ **c)** $D = \mathbb{R}$; $x = \pm\sqrt{-\frac{74}{25}}$, $L = \{\,\}$

2.139 **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 12\}$; $L = \{16\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 5\}$; $L = \left\{\frac{49}{8}\right\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 16\}$; $x = 18$, $L = \{\,\}$

2.140 **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 2\}$; $L = \{10\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 5\}$; $L = \{6\}$

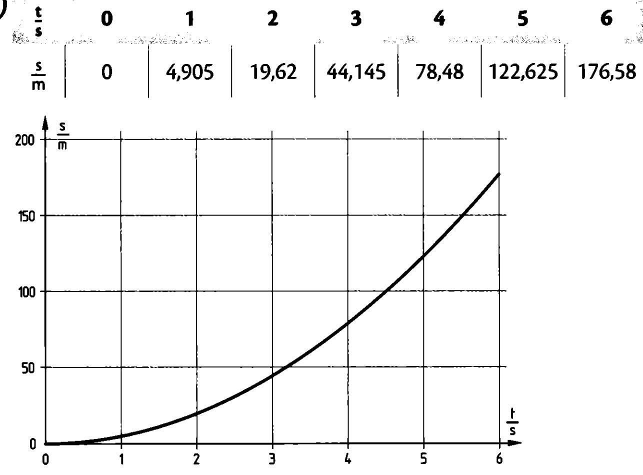
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 6\}$; $L = \{10\}$

Quadratische Funktionen und Gleichungen

3

3.1 ***1)***

$\frac{t}{s}$	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{s}{m}$	0	4,905	19,62	44,145	78,48	122,625	176,58



Die Flasche kommt nach 5,284... s auf dem Boden auf.

2) Potenzfunktion 2. Grads

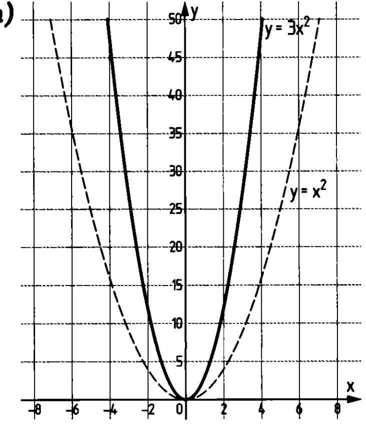
3.2 Einfluss des Faktors a auf die Form der Parabel:

$|a| > 1 \Rightarrow$ Parabel wird schmäler.

$0 < |a| < 1 \Rightarrow$ Parabel wird breiter.

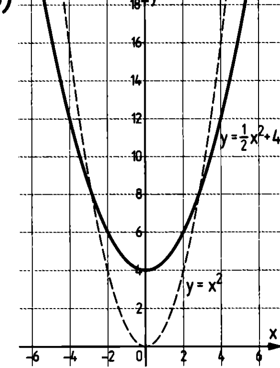
$a < 0 \Rightarrow$ Parabel wird an der x-Achse gespiegelt.

3.10 **a)**



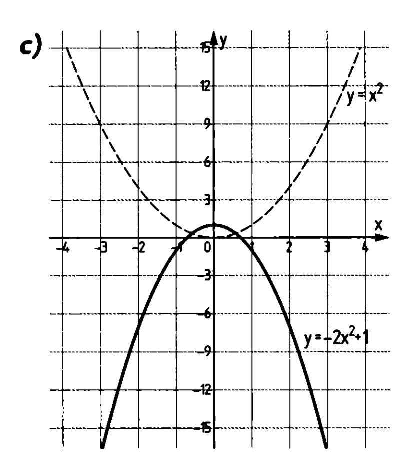
Die Parabel ist in y-Richtung gestreckt (wegen a = 3). Die Lage bleibt gleich.

b)

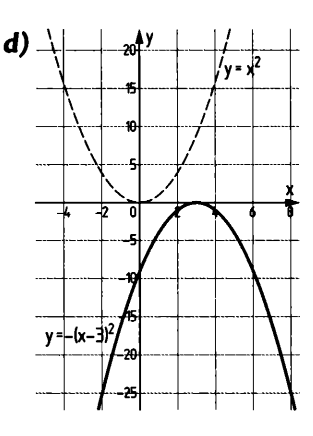


Die Parabel ist in y-Richtung gestaucht $\left(\text{wegen } a = \frac{1}{2}\right)$ und um 4 Einheiten in positiver y-Richtung verschoben.

c)



d)

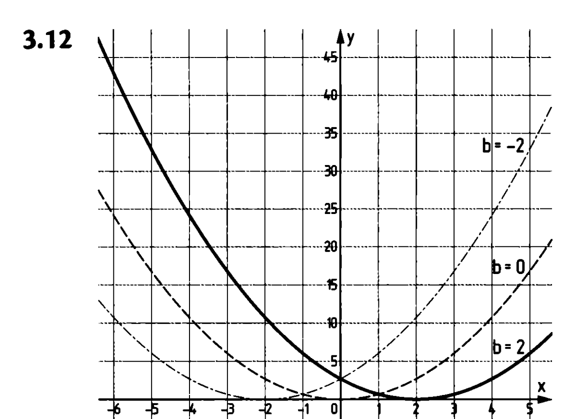


Die Parabel ist in y-Richtung gestreckt und an der x-Achse gespiegelt (wegen $a = -2$) und um 1 Einheit in positiver y-Richtung verschoben.

Die Parabel ist an der x-Achse gespiegelt (wegen $a = -1$) und um 3 Einheiten in positiver x-Richtung verschoben.

3.11 ***1)*** und ***2)*** $y = a \cdot x^2 \Rightarrow$ schmäler für $|a| > 1$ bzw. breiter für $|a| < 1$

3.12



Für $b = 0$ ist der Graph die Grundparabel. $b = 2$ bewirkt eine Verschiebung um 2 Einheiten in positiver x-Richtung. $b = -2$ bewirkt eine Verschiebung um 2 Einheiten in negativer x-Richtung.

3.13 ***a)*** S(9|5) ***c)*** S(2|0) ***e)*** S(−1|0) ***g)*** S(3|4)
b) S(2|−1) ***d)*** S(1|0) ***f)*** S(0|5) ***h)*** S(−1|−12)
Auf die graphische Darstellung wird verzichtet.

3.14 ***a)*** S(−r|−s) ***b)*** S(t|n) ***c)*** S(w|−v) ***d)*** S(−k|c)

3.15 ***a)*** ***1)*** Die Parabel müsste wegen −2 nach rechts und wegen +1 nach oben verschoben sein.
2) Die Parabel müsste wegen +1 nach oben verschoben sein.
3) Die Parabel müsste wegen −2 nach rechts verschoben sein.
b) ***1)*** Die Parabel müsste nach oben offen und der Schnittpunkt mit der y-Achse unterhalb des Ursprungs sein.
2) Die Parabel müsste die y-Achse unterhalb des Ursprungs schneiden.
3) Die Parabel müsste nach oben offen sein.

3.16 ***a)*** $y = x^2 + c, c > 0$
b) $y = a \cdot (x - b)^2, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, b \in \mathbb{R}$
c) $y = a \cdot x^2, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
d) $y = a \cdot x^2 + c, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, c \in \mathbb{R}$

3.17 ***a)*** $y = 2 \cdot (x + 5)^2 - 54$; $S(-5|-54)$
b) $v(t) = (t + 3)^2 - 11$; $S(-3|-11)$
c) $f(a) = -(a + 8)^2 + 76$; $S(-8|76)$
d) $g(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$; $S\left(\frac{1}{2}\middle|-\frac{5}{4}\right)$
e) $y = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 - 5$; $S(-2|-5)$
f) $h(b) = -(b - 14)^2 + 192$; $S(14|192)$

3.18 ***a) 1)*** D ***2)*** B ***3)*** C
b) 1) B ***2)*** C ***3)*** A
A: $y = 3 \cdot (x + 4)^2 - 3$
D: $y = -2 \cdot (x - 3)^2 + 2$

3.19 ***a)*** A: $y = -(x + 2)^2 + 5$
B: $y = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2 - 4$
C: $y = -5 \cdot (x - 2)^2 + 2$
D: $y = 8 \cdot (x - 4)^2 - 2$
b) A: $y = \frac{1}{4} \cdot (x + 1)^2 + 2$
B: $y = 2 \cdot (x - 3)^2 + 1$
C: $y = -(x + 3)^2 + 1$
D: $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2 - 3$

3.20 ***a)*** $y = 2 \cdot (x - 3)^2 - 1$, $Y(0|17)$ ***b)*** $y = -(x + 2)^2 - 1$, $Y(0|-5)$ ***c)*** $y = \frac{3}{4} \cdot (x - 4)^2$, $Y(0|12)$
Auf die graphische Darstellung wird verzichtet.

3.21 ***a)*** $y = (x - 1)^2 + 1$ ***c)*** $y = (x + 3)^2 + 2$ ***e)*** $y = (x + 1)^2 - 4$
b) $y = (x - 4)^2$ ***d)*** $y = (x - 8)^2 + 5$ ***f)*** $y = x^2 - 7$
Einsetzen der Koordinaten des neuen Scheitels in die Scheitelpunktform $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ mit $a = 1$.

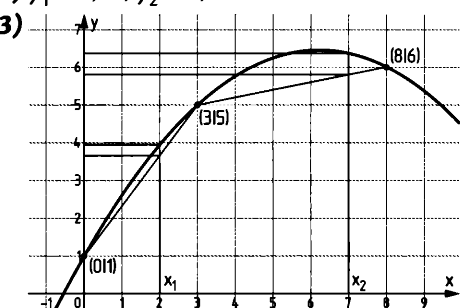
3.22 ***a)*** $y = 3x^2$ ***b)*** $y = 2x^2$ ***c)*** $y = \frac{x^2}{9}$ ***d)*** $y = \frac{x^2}{8}$ ***e)*** $y = -10x^2$ ***f)*** $y = -x^2$
Einsetzen der Koordinaten des gegebenen Punkts in die Gleichung $y = a \cdot x^2$ ergibt a.
(Wegen $S(0|0)$ ist $x_S = 0$ und $y_S = 0$.)

3.23 ***a)*** $y = -2 \cdot (x - 1)^2 + 2$ ***b)*** $y = \frac{4}{25} \cdot (x + 3)^2 + 1$ ***c)*** $y = 4 \cdot (x + 1)^2 - 1$
Einsetzen der Koordinaten des Scheitels und der Koordinaten des Punkts P in die Scheitelpunktform $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ ergibt a.

3.24 ***a)*** $y = x^2 - 1{,}5x - 6$ ***c)*** $y = x^2 + 2x - 6$
b) $y = x^2 + 10x + 24$ ***d)*** $y = x^2 - 18x + 73$
Einsetzen der Koordinaten des Punkts P bzw. des Punkts R in die Polynomform $y = x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ und Auflösen des Gleichungssystems ergibt die Koeffizienten a_1 und a_0.

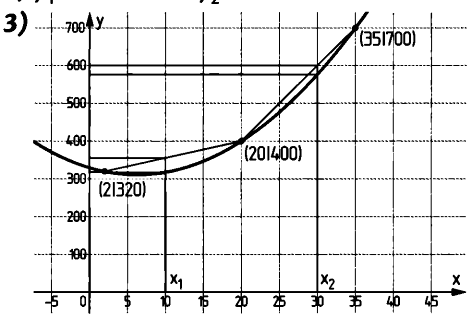
3.25 ***a)*** $y = x^2 + \frac{9}{2}x - 8$ ***c)*** $y = -x^2 + \frac{1}{3}x - 1$
b) $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ ***d)*** $y = x^2 - \frac{1}{5}x + 1$
Einsetzen der Koordinaten des Punkts P, des Punkts Q bzw. des Punkts R in die Polynomform $y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ und Auflösen des Gleichungssystems ergibt die Koeffizienten a_2, a_1 und a_0.

3.26 ***a) 1)*** $y_1 = 3{,}\dot{6}$, $y_2 = 5{,}8$
2) $y_1 = 3{,}95$, $y_2 = 6{,}3\dot{6}$
3)



Der Näherungswert durch die quadratische Interpolation ist in beiden Fällen größer.

b) 1) $y_1 = 355{,}\dot{5}$, $y_2 = 600$
2) $y_1 = 317{,}845...$, $y_2 = 576{,}430...$
3)



In beiden Fällen liefert die lineare Interpolation größere Werte.

3.27 – 3.39

3.27 ***a)*** $y = \frac{65}{812^2}\,m^{-1} \cdot x^2$ ***b)*** $y = \frac{65{,}72}{995{,}5^2}\,m^{-1} \cdot x^2$ ***c)*** $y = \frac{67}{640^2}\,m^{-1} \cdot x^2$

3.28 $y = -\frac{6}{3{,}062\,5}\,cm^{-1} \cdot x^2 + 6\,cm$

3.29 ***1)*** $y = -0{,}01\dot{2}\,cm^{-1} \cdot x^2$ ***3)*** $y = -0{,}01\dot{2}\,cm^{-1} \cdot (x - 30\,cm)^2 + 11\,cm$
2) $y = -0{,}01\dot{2}\,cm^{-1} \cdot x^2 + 11\,cm$
Die Parabel aus ***1)*** ist in ***2)*** um 11 cm nach oben verschoben und in ***3)*** um 11 cm nach oben und um 30 cm nach rechts.
Auf die graphische Darstellung wird verzichtet.

3.30 Es ist mit individuell recherchierten Werten zu arbeiten.

3.31 ***1)*** $y = -\frac{30}{3\,025}\,m^{-1} \cdot x^2 + 30\,m$ ***2)*** 3,966... m, 8,925... m, 15,867... m, 24,793... m ***3)*** 63,508... m

3.32 Du könntest zum Beispiel von einer Scheibe Brot abbeißen. Der verbleibende Rest zeigt den Verlauf der Parabel.

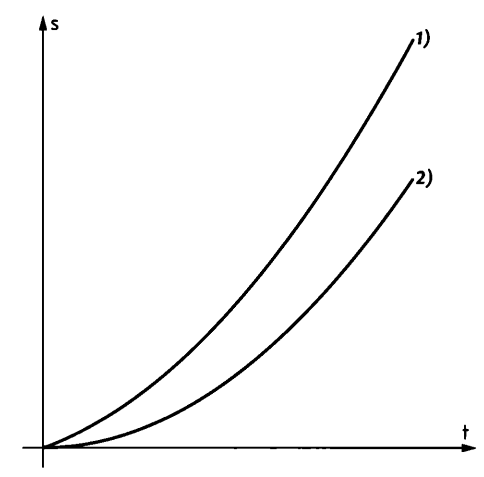
3.33 ***1)*** $y = -\frac{16}{9}\,m^{-1} \cdot x^2$ (Scheitelpunkt der Parabel im Ursprung)
2) Ja. Das 1,8 m breite Plakat wird symmetrisch zur y-Achse aufgeklebt. An der Stelle x = 0,9 m ist der Betrag des y-Werts 1,44 m. Dieser wird von der Fensterhöhe 4 m subtrahiert und ergibt die maximal mögliche Höhe des Plakats von 2,56 m.

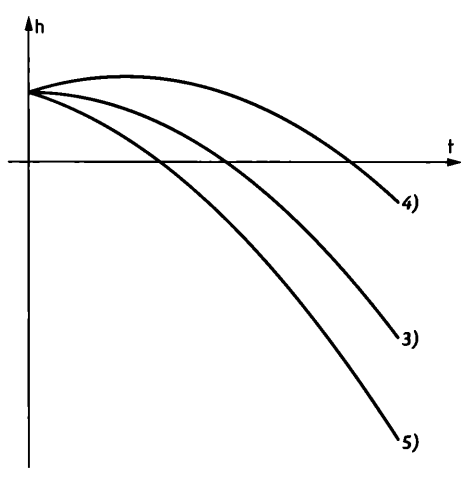
3.34 ***1)*** $y = -\frac{1}{4} \cdot (x - 2)^2 + 2{,}6$
2) 5,224... m
3) Anton könnte die Spritzpistole um mindestens 0,4625 m höher halten, er könnte 0,402... m weiter in Richtung Coline gehen oder er könnte den Winkel der Spritzpistole so verändern, dass die Parabel flacher wird (zB Parabel durch die Punkte S(2|2,6), A(0|16) und Coline (4,5|1,5) mit der Gleichung $y = -\frac{47}{225}x^2 + \frac{413}{450}x + 1{,}6$).

3.37 Auf die grafischen Darstellungen wird verzichtet.
1) 0,050... m ***2)*** 1,274... m ***3)*** 5,096... m ***4)*** 20,387... m

3.38 ***1)*** Abschlaghöhe = 1 m ***2)*** 2,923... s ***3)*** $t \in [0\,s; 2{,}923...\,s]$ ***4)*** 10,989... m

3.39





1) Ein Objekt wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach unten geworfen. Aus dem Graphen kann man den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit ablesen.

2) Ein Objekt wird fallen gelassen. Aus dem Graphen kann man den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit ablesen.
3) Ein Objekt wird aus einer Anfangshöhe fallen gelassen. Aus dem Graphen kann man die Höhe in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit ablesen.
4) Ein Objekt wird aus einer Anfangshöhe mit einer Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen. Aus dem Graphen kann man die Höhe in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit ablesen.
5) Ein Objekt wird aus einer Anfangshöhe mit einer Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach unten geworfen. Aus dem Graphen kann man die Höhe in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit ablesen.

3.41 ***1)*** 2,2 m bzw. 55 m
2) 1. Drittel: 3,692... s, 2. Drittel: 1,529... s, 3. Drittel: 1,173... s, insgesamt: 6,396... s
3) 17,436... $\frac{m}{s}$

3.42 ***1)*** 0,128 16 $\frac{s^2}{m}$
2) $24{,}7\dot{2}$ m, $48{,}4\dot{5}$ m
3) 44,971... $\frac{km}{h}$, 63,599... $\frac{km}{h}$
4) Der Bremsweg wird um 5,191... m länger.
5) $38{,}6\dot{1}$ m, $126{,}\dot{6}$ m bzw. $203{,}2\dot{3}$ m; $a(v) = v + k \cdot v^2$
6) 0,131 04 $\frac{s^2}{m}$ bzw. 0,151 2 $\frac{s^2}{m}$
Der Bremsweg hängt stark vom Straßenbelag ab sowie vom Zustand der Straße, dem Fahrzeug und der Stärke der Bremsung. Durch beispielsweise Eis auf der Fahrbahn oder einen schlechten Zustand der Bremse kann sich der Bremsweg deutlich verlängern, durch eine Vollbremsung (Gefahrenbremsung) verkürzen.
zB $s(v) \approx \frac{v^2}{100}$, s ... Bremsweg in Meter, v ... Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$

3.43 4,721... $\frac{m}{s^2}$

3.44 ***1)*** Auf die grafischen Darstellungen wird verzichtet. Die längste Flugbahn wird bei einem Winkel von 45° erreicht. Bei 30° und bei 60 ° fliegt der Ball gleich weit.
2) $\alpha = 30°$: 11,896... m max. Höhe, 82,421... m max. Weite
$\alpha = 45°$: 23,793... m max. Höhe, 95,172... m max. Weite
$\alpha = 60°$: 35,689... m max. Höhe, 82,421... m max. Weite
3) Ein Schuss mit 34,625...° bis 37,883...° bzw. mit 53,687...° bis 55,374...° trifft direkt ins Tor.
Bei einer fixen Abschussgeschwindigkeit des Balls gibt es immer genau zwei Parabeln, die dieselben Nullstellen und denselben x-Wert des Scheitelpunkts haben.

3.45 ***A) 4)*** Die Nullstelle gibt an, nach welcher Zeit der Stein wieder am Boden auftrifft.
B) 1) Die Nullstelle gibt an, in welcher horizontalen Entfernung die Kugel auf den Boden fällt.
2) Die Nullstelle gibt an, nach welcher Zeit die Kugel am Boden auftrifft.
C) 2) Die Nullstelle gibt an, nach welcher Zeit die Kugel am Boden auftrifft.
D) 3) Die Nullstelle gibt an, in welcher horizontalen Entfernung die Kugel am Boden auftrifft.
4) Die Nullstelle gibt an, nach welcher Zeit die Kugel wieder am Boden auftrifft.

3.46 ***1)*** 15 m ***2)*** 25 m ***3)*** 20 m ***4)*** 40 m

3.47 ***1)*** $t \in [0\ s; 16{,}309...\ s]$
2) nach 16,309... s; Nullstelle
3) Nach wie viel Sekunden erreicht die Rakete eine Höhe von 20 m?
4) 8,154... s; Scheitelpunkt
5) $v_0 = 75{,}095\ \frac{km}{h}$ Es ändert sich nur die Lage der Parabel. Der Scheitelpunkt wird nach unten und nach links verschoben. Die Form der Parabel ändert sich nicht.

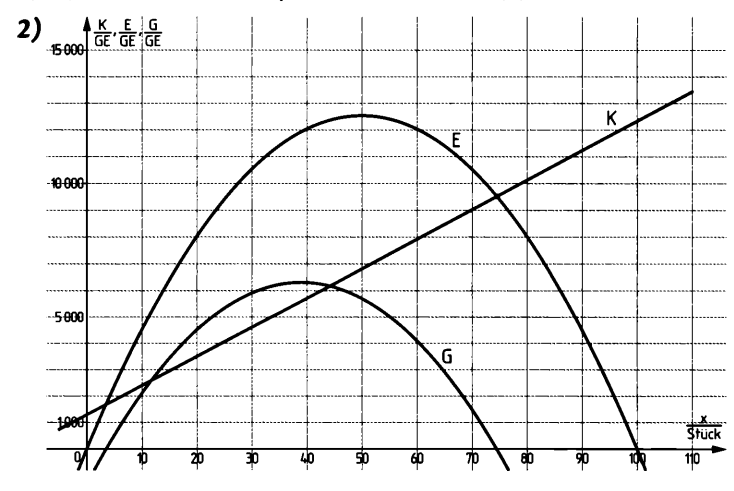
3.48 9,326... Tage

3.49 ***1)*** $92{,}434...\ \frac{km}{h}$
2) $45\ \frac{km}{h}$
3) Laut Funktion wäre der Verbrauch bei zB $0\ \frac{km}{h}$ 7,55 Liter. Das ist nicht realistisch. Der durch die Funktion gegebene quadratische Verlauf ist daher zur Angabe des Kraftstoffverbrauchs für niedrige Geschwindigkeiten nicht geeignet.

3.50 ***1) 1)*** 6,650... m
2) 0,353... m bzw. 5,601... m
3) Der Wasserstrahl verläuft 4,091... cm über ihm.
4) Bei einer Entfernung unter 0,230... m oder zwischen 5,724... m und 6,650... m wird der Gärtner sicher vom Wasserstrahl getroffen.

3.51 ***1)*** –0,2
2) 15 m
3) bei 10 m Entfernung eine Höhe von 20 m
4) 2,254... m bzw. 17,745... m

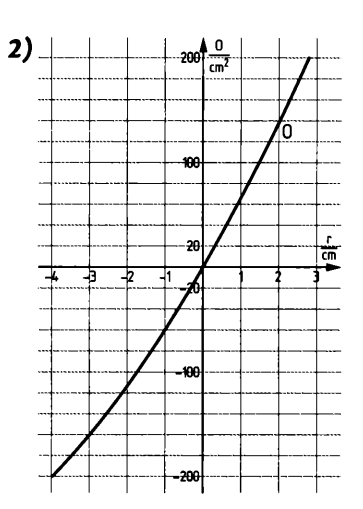
3.52 ***1)*** $K(x) = 110x + 1\,300$, $p(x) = -5x + 500$, $G(x) = -5x^2 + 390x - 1\,300$
2)



3) Gewinnschwelle: 4 Stück (3,489...), Gewinngrenze: 74 Stück (74,510...), maximaler Gewinn: 6 305 GE bei 39 Stück

3.53 ***1)*** Die Funktion $O(r) = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi h \cdot r$ hat die Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x$ und das ist eine quadratische Funktion.

2)



Der Bereich mit $r > 0$ beschreibt diesen Sachverhalt.

3.54 ***1) A)*** Der erste Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von 15 $\frac{m}{s}$ geworfen.

B) Der zweite Stein wird nur fallen gelassen. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist null.

2)

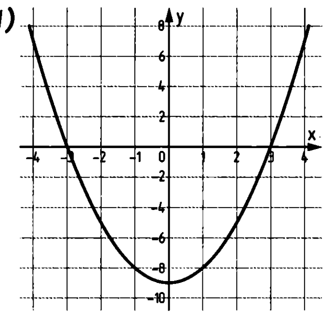
3) h_0 ist jeweils die Stelle, an der die Parabel die y-Achse schneidet. Diese entspricht der Abwurfhöhe. v_0 ist die Anfangsgeschwindigkeit des Steins. Deshalb verläuft die erste Parabel steiler nach unten. g ist die Erdbeschleunigung, die auf alle fallenden Körper wirkt.

4) 49,62 m bzw. 19,62 m

5) 3,238... s bzw. 3,192... s

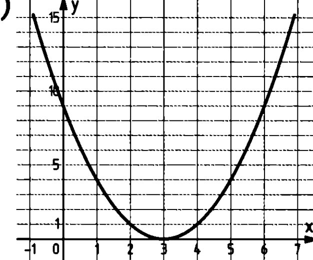
6) Der erste Stein prallt zuerst auf (nach 5,036... s bzw. nach 5,530... s). Die Abwurfhöhe des ersten Steins ist höher. Da der erste Stein aber mit einer Anfangsgeschwindigkeit nach unten geworfen wird, trifft er trotzdem früher am Boden auf.

3.55 ***1)***



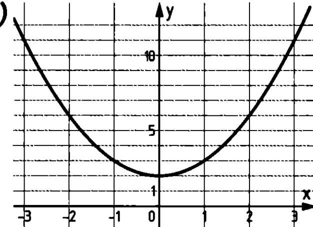
zwei Nullstellen; $x^2 - 9 = 0$

2)



eine Nullstelle; $(x - 3)^2 = 0$

3)



keine Nullstelle; $x^2 + 2 = 0$

Eine quadratische Funktion hat entweder zwei, eine oder keine Nullstelle.

3.56 ***1)*** Linear; die Gleichung hat die Form $ax + b = 0$.

2) Quadratisch; die Gleichung hat die Form $ax^2 + b = 0$.

3) Quadratisch; die Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$.

4) Quadratisch; durch Multiplikation mit x entsteht die Gleichung $2 = x^2$, diese hat die Form $ax^2 + b = 0$.

5) Weder noch; x steht im Exponenten.

6) Quadratisch; die Gleichung hat die Form $ax^2 - bx = 0$.

7) Quadratisch; durch Multiplikation mit x^2 entsteht die Gleichung $1 = 4x^2$, diese hat die Form $ax^2 + b = 0$.
8) Linear; durch Multiplikation mit x entsteht die Gleichung $h = kx$, diese hat die Form $ax + b = 0$.

3.57 **a)** $x^2 - 2x + 3 = 0$ **b)** $x^2 + 2x - 4 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$ **d)** $x^2 + 7x - 3 = 0$

3.58 **a)** $\{-13; 13\}$ **b)** $\{-18; 18\}$ **c)** $\{-5; 5\}$ **d)** $\{\,\}$ **e)** $\{-12; 12\}$

3.59 **a)** $\{-2; 2\}$ **b)** $\{-15; 15\}$ **c)** $\{\,\}$ **d)** $\{\,\}$ **e)** $\{-4; 4\}$

3.60 Auf die grafischen Darstellungen wird verzichtet.
Die Funktionen **2)** und **3)** haben eine Nullstelle im Ursprung. Bei beiden ist die Konstante $c = 0$.

3.61 **1)** $b = 0$, c beliebig **2)** b beliebig, $c = 0$

3.62 **a)** $\{-6; 0\}$ **b)** $\{0; 2\}$ **c)** $\{0; \sqrt{2}\}$ **d)** $\left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}$

3.63 **a)** $\{0; 7\}$ **b)** $\{0; 9\}$ **c)** $\{-3 \cdot \sqrt{5}; 0\}$ **d)** $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$

3.64 **1)** $x - 1 = \pm 3 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$
2) $(x - 1)^2 = 9 \Rightarrow x - 1 = \pm 3 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$
Wurzelziehen aus einer Summe ist nicht möglich. Daher wird die linke Seite zuerst mithilfe einer binomischen Formel faktorisiert.

3.65 **a)** $(x + 1)^2 + 4$ **b)** $(x + 2)^2 + 5$

3.67 **1)** $\{-4, 3\}$ **3)** $x^2 + 6x - 16 \Rightarrow x_1 = -8,\ x_2 = 2 \Rightarrow -8 + 2 = -p, -8 \cdot 2 = q$
2) $(x + 5) \cdot (x - 7)$

3.70 **a)** $\{-8; -3\}$ **b)** $\left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$ **c)** $\{5\}$ **d)** $\left\{-5; -\frac{4}{5}\right\}$ **e)** $\{-1; 2\}$ **f)** $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ **g)** $\{-11; 12\}$ **h)** $\left\{-\frac{3}{7}; 1\right\}$
Wenn die quadratische Gleichung in der Normalform gegeben ist, eignet sich die kleine Lösungsformel besser, im anderen Fall die große.

3.71 **a)** D = 4,25; zwei Lösungen; {−0,561...; 3,561...} **c)** D = 0; eine Lösung; {4}
b) D = −18,75; keine Lösung **d)** D = 153, zwei Lösungen; {−1,085...; 0,460...}

3.72 **a)** {−1,582...; 7,582...} **c)** {0,341...; 3,658...} **e)** {−9,795...; −0,204...} **g)** { }
b) {1; 3} **d)** { } **f)** {0,291...; 6,850...} **h)** {−0,164...; 12,164...}

3.73 **a)** $\{-2; 1\}$ **b)** $\{-2; -1\}$ **c)** $\left\{\frac{2}{3}; 2\right\}$

3.74 **a)** $\{\,\}$ **b)** $\left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$ **c)** $\left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$

3.75 **a)** $\{-1; 1\}$ **b)** $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right\}$ **c)** $\{-1; 3\}$

3.76 Jede Gleichung dieser Form hat zwei Lösungen, da es sich um eine gemischtquadratische Gleichung ohne Konstante handelt. Herausheben von x ergibt $x \cdot (ax + b) = 0$. Anwenden des Produkt-Null-Satzes ergibt $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3.77 ***1)*** $\{-2\}$ und $\{3\}$
2) Beide Gleichungen haben nur eine Lösung.
3) $c = 25$
4) $a \cdot (x + b)^2 = 0$; die Linearfaktoren sind identisch.
5) Die Vielfachheit einer Nullstelle gibt an, auf welche Art die Funktion die x-Achse in einem Punkt „schneidet" bzw. „berührt". Einfache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse, zweifache Nullstelle: Berührstelle mit der x-Achse, dreifache Nullstelle: Schnittstelle mit der x-Achse. usw.

3.78 ***a)*** $2 + 3 = 5 \neq -p = -1;\ 2 \cdot 3 = 6 \neq q = -6$ ***b)*** $2 + 37 = 39 = -p;\ 2 \cdot 37 = 74 \neq q = 75$

3.79 ***a)*** $\{-3; -1\};\ (x + 3) \cdot (x + 1) = 0$
b) $\{-12; 9\};\ (x + 12) \cdot (x - 9) = 0$
c) $\{-4; 9\};\ (x + 4) \cdot (x - 9) = 0$
d) $\{-10; 1\};\ (x + 10) \cdot (x - 1) = 0$

3.81 ***a)*** $x_2 = -11;\ q = 33;\ (x - 3) \cdot (x + 11) = 0$
b) $x_2 = \frac{5}{2};\ p = \frac{1}{2};\ (x + 2) \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$
c) $x_2 = -9;\ p = 10;\ (x + 1) \cdot (x + 9) = 0$
d) $x_2 = -\frac{28}{3};\ c = 196;\ 3 \cdot (x - 7) \cdot \left(x + \frac{28}{3}\right) = 0$
e) $x_2 = -\frac{1}{48};\ b = \frac{575}{12};\ 4 \cdot (x - 12) \cdot \left(x + \frac{1}{48}\right) = 0$
f) $x_2 = -\frac{5}{19};\ a = -\frac{19}{25};\ -\frac{19}{25} \cdot (x + 5) \cdot \left(x + \frac{5}{19}\right) = 0$

3.82 ***a)*** $x^2 - 8x + 15 = 0$
b) $a^2 - a - 2 = 0$
c) $m^2 + 2m - 24 = 0$
d) $r^2 - 21r + 110 = 0$
e) $2v^2 - v - 6 = 0$
f) $8s^2 + 14s + 5 = 0$
g) $100u^2 - 30u + 2 = 0$
h) $5c^2 - 72c - 45 = 0$

3.84 ***a)*** Das Lösen der Gleichung kann als Schnitt der Parabel $y_P = x^2 - 2x$ mit der Geraden $y_G = x + 4$ aufgefasst werden. Die Lösungen sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte. $\{-1; 4\}$
b) Das Lösen der Gleichung kann als Schnitt der Parabel $y_P = x^2 + 3x + 4$ mit der Geraden $y_G = -x - 5$ aufgefasst werden. Die beiden Graphen weisen keine gemeinsamen Schnittpunkte auf. $\{\ \}$
c) Das Lösen der Gleichung kann als Schnitt der Parabeln $y_{P1} = -x^2 + 4$ und $y_{P2} = 2 \cdot (x + 2)^2$ aufgefasst werden. $\{-2; -0; 6\}$

3.85 ***a)*** $(0|-1)$ ***b)*** $(-0{,}5|6), (2|6)$

3.87 ***a)*** $\frac{x+2}{x-6}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{1; 6\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{6\}$
b) $\frac{x+5}{x-5}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-5; 5\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{5\}$
c) $\frac{x-9}{x+4}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-4; 5\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-4\}$
d) $\frac{x+11}{x+10}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-10; 10\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-10\}$
e) $\frac{x-1}{x+3}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-3; -1\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$
f) $\frac{x+14}{x-15}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-15; 15\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{15\}$
g) $\frac{x+8}{x+3}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$
h) $\frac{x+9}{x+13}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-13; 9\}$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-13\}$

3.89 ***a)*** $D = \mathbb{R}\backslash\{0\};\ L = \left\{\frac{1}{8}; 4\right\}$
b) $D = \mathbb{R}\backslash\{0; 2\};\ L = \{-2; 4\}$
c) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\};\ L = \{0; 4\}$
d) $D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\};\ L = \{-4\}$

3.90 ***a)*** $D = \mathbb{R}\backslash\{-5; 5\};\ L = \left\{-\frac{25}{9}; 9\right\}$
b) $D = \mathbb{R}\backslash\{-10; 10\};\ L = \{-2; 2\}$
c) $D = \mathbb{R}\backslash\{-3; 7\};\ L = \{4\}$
d) $D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\};\ L = \{6\}$

3.91 ***a)*** $D = \mathbb{R}\backslash\{-5; 5\};\ L = \{-11; 11\}$
b) $D = \mathbb{R}\backslash\{0; 1\};\ L = \left\{-\frac{10}{3}\right\}$
c) $D = \mathbb{R}\backslash\{-4; 0; 4\};\ L = \left\{-\frac{48}{11}; 6\right\}$
d) $D = \mathbb{R}\backslash\{1\};\ L = \{-1; 2\}$

3.92 ***a)*** $t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot (h_0 - h)}{g}}$; reell für $h_0 \geqslant h$.

b) $a_{1,2} = -h \pm\sqrt{h^2 + \frac{O}{2}}$; wegen $h \geqslant 0$ und $O \geqslant 0$ sind die Lösungen jedenfalls reell.

c) $x_{1,2} = \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{4} - \frac{2M}{q}}$; reell für $\ell^2 \geqslant \frac{8M}{q}$.

d) $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$; reell für $R \geqslant r$.

e) $R_{1_{1,2}} = R_{ges} - \frac{R_3}{2} \pm \frac{\sqrt{4R_{ges}^2 + R_3^2}}{2}$; wegen $R_{ges} \geqslant 0$ und $R_3 \geqslant 0$ sind die Lösungen jedenfalls reell.

f) $t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot s}}{a}$; reell für $v_0^2 + 2a \cdot s \geqslant 0$.

3.93 $\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = x^2 + px + q$

3.94 $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3.95 $\left\{-\frac{a+b}{a}; 1\right\}$

3.97 ***a)*** $x_1 = -3, x_2 = -5$
Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = 15$ und $x_1 + x_2 = -8$ gilt.
Möglich: $15 = 1 \cdot 15 = -1 \cdot (-15) = 3 \cdot 5 = -3 \cdot (-5)$. Für die Summe erhält man $-3 + (-5) = -8$.

b) $x_1 = 4, x_2 = 6$
Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = 24$ und $x_1 + x_2 = 10$ gilt.
Möglich: $24 = 1 \cdot 24 = -1 \cdot (-24) = 2 \cdot 12 = -2 \cdot (-12) = 3 \cdot 8 = -3 \cdot (-8) = 4 \cdot 6 = -4 \cdot (-6)$. Für die Summe erhält man $4 + 6 = 10$.

c) $x_1 = 3, x_2 = 12$
Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = 36$ und $x_1 + x_2 = 15$ gilt.
Möglich: $36 = 1 \cdot 36 = -1 \cdot (-36) = 2 \cdot 18 = -2 \cdot (-18) = 3 \cdot 12 = -3 \cdot (-12) = 4 \cdot 9 = -4 \cdot (-9) =$
$= 6 \cdot 6 = -6 \cdot (-6)$. Für die Summe erhält man $3 + 12 = 15$.

d) $x_1 = -15, x_2 = 3$
Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = -45$ und $x_1 + x_2 = -12$ gilt.
Möglich: $-45 = -1 \cdot 45 = 1 \cdot (-45) = -3 \cdot 15 = 3 \cdot (-15) = -5 \cdot 9 = 5 \cdot (-9)$. Für die Summe erhält man $3 + (-15) = -12$.

e) $x_1 = -9, x_2 = 3$
Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = -27$ und $x_1 + x_2 = -6$ gilt.
Möglich: $-27 = -1 \cdot 27 = 1 \cdot (-27) = -3 \cdot 9 = 3 \cdot (-9)$. Für die Summe erhält man $3 + (-9) = -6$.

f) $x_1 = -4, x_2 = 1$
Herausheben von 3 ergibt $3 \cdot (x^2 + 3x - 4) = 0$. Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = -4$ und $x_1 + x_2 = -3$ gilt.
Möglich: $-4 = -1 \cdot 4 = 1 \cdot (-4) = -2 \cdot 2 = 2 \cdot (-2)$. Für die Summe erhält man $1 + (-4) = -3$.

g) $x_1 = -1, x_2 = 2$
Herausheben von 5 ergibt $5 \cdot (x^2 - x - 2) = 0$. Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = -2$ und $x_1 + x_2 = 1$ gilt.
Möglich: $-2 = -1 \cdot 2 = 1 \cdot (-2)$. Für die Summe erhält man $-1 + 2 = 1$.

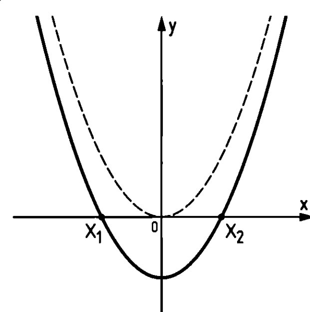
h) $x_1 = -4, x_2 = -3$
Herausheben von 2 ergibt $2 \cdot (x^2 + 7x + 12) = 0$. Man sucht Zahlen, für die $x_1 \cdot x_2 = 12$ und $x_1 + x_2 = -7$ gilt.
Möglich: $12 = 1 \cdot 12 = -1 \cdot (-12) = 2 \cdot 6 = -2 \cdot (-6) = 3 \cdot 4 = -3 \cdot (-4)$. Für die Summe erhält man $-3 + (-4) = -7$.

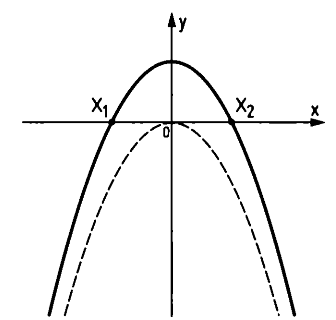
3.98 $p \in]-6; 6[$

3.99 $q = -9$

3.100 $c < \frac{1}{3}$

3.101 ***1)*** $a > 0, c \leqslant 0$ oder $a < 0, c \geqslant 0$. Die Nullstellen liegen bei $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.





2) $a \cdot \left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \cdot \left(x - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)$. Es ergibt sich die binomische Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

3.103 bis **3.106**: $D = \mathbb{Z}$

3.103 −6 bzw. 6

3.104 −7 bzw. 7

3.105 −3 und −2 bzw. 3 und 4

3.106 −17 bzw. 17

3.107 ***1)*** 18 und 20 ***2)*** −20 und −18 bzw. 18 und 20

3.108 und **3.109**: $D = \mathbb{Z}$

3.108 ***1)*** −3 und −1 bzw. 1 und 3
2) Auf den Wert (−1).
3) Die Diskriminante wird negativ, die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung. Dann gibt es keine zwei Zahlen, die die angegebenen Bedingungen erfüllen.

3.109 ***1)*** Die Koeffizienten sind bis auf das Vorzeichen genau die Zahlen aus der Angabe. Dies ergibt sich wegen des Satzes von Vieta.
2) 18 und 24

3.111 D: $a, b \in]0 \text{ cm}; 10{,}5 \text{ cm}[$; 4,5 cm bzw. 6 cm

3.112 ***1)*** Gleichung A), wobei x die kürzere Parallelseite angibt bzw. Gleichung C), wobei x die längere Parallelseite angibt.
2) D: $a, c, h \in \mathbb{R}^+$; a = 10 cm, c = 8 cm, h = 5 cm
3) Nein. Es fehlt ein weiteres Bestimmungsstück.

3.113 D: $a, b, c \in \mathbb{R}^+$; 5 cm, 7 cm bzw. 10 cm

3.114 D: $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$; 5 cm bzw. 8 cm. Die Würfel könnten aus Holz sein.

3.115 D: $b \in]30 \text{ m}; \infty[$, $\ell \in]40 \text{ m}; \infty[$; $b = 80$ m, $\ell = 90$ m

3.116 D: $b \in]0\text{ m}; \infty[$, $\ell \in]22\text{ m}; \infty[$; 10,302... %

3.117 39,972... m

3.119 1 h 36 min

3.120 D: $v_{PKW} \in \left]20\,\frac{km}{h}; \infty\right[$, $v_{LKW} \in \left]0\,\frac{km}{h}; \infty\right[$;
$v_{PKW} = 60\,\frac{km}{h}$, $v_{LKW} = 40\,\frac{km}{h}$ bzw. $v_{PKW} = 80\,\frac{km}{h}$, $v_{LKW} = 60\,\frac{km}{h}$

3.121 D: $v_{Laufen} \in \left]0\,\frac{km}{h}; \infty\right[$, $v_{Skaten} \in \left]6\,\frac{km}{h}; \infty\right[$; $v_{Laufen} = 9\,\frac{km}{h}$, $v_{Skaten} = 15\,\frac{km}{h}$;
$t_{Laufen} = 1$ h 40 min, $t_{Skaten} = 1$ h

3.123 ***1)*** x steht für die Zeit, die die Pumpe B alleine benötigt, um das Boot aufzupumpen.
2) D: $t_A \in]2\text{ min}; \infty[$, $t_B \in]0\text{ min}; \infty[$; A: 13,082... min, B: 11,082... min

3.124 D: $t \in]0\text{ min}; \infty[$ bzw. $t \in]10\text{ min}; \infty[$; 23,866... min bzw. 33,866... min

3.125 ***1)*** D: $t_E \in]8\text{ h}; \infty[$, $t_F \in]0\text{ h}; \infty[$; E: 12 h, F: 4 h
2) $\frac{W}{x} \cdot a\text{ h} + \frac{W}{x - 8\text{ h}} \cdot a\text{ h} = W$
Die weiteren Überlegungen erfolgen ohne Einheiten.
Division durch W ergibt $\frac{a}{x} + \frac{a}{x-8} = 1$. Umformen der Gleichung ergibt $x^2 - (8 + 2a) \cdot x + 8a = 0$ mit der Diskriminante $\left(\frac{8+2a}{2}\right)^2 - 8a = a^2 + 16$. Wegen $a^2 \in \mathbb{R}^+$ gilt $a^2 + 16 > 0$. Die Gleichung hat daher für jedes a zwei reelle Lösungen.

3.126 $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 7\}$; 84 Schüler
Der ursprüngliche Preis je Schüler beträgt $\frac{462}{x-7}$. Der Preis von 462,00 € ergibt sich aus dem neuen Preis je Schüler mal der Anzahl der Schüler: $\left(\frac{462}{x-7} - 0{,}5\right) \cdot x = 462$. Vereinfachen und bruchfrei machen ergibt: $-0{,}5x^2 + 3{,}5x + 3\,234 = 0$ bzw. $x^2 - 7x - 6\,468 = 0$. Lösen dieser quadratischen Gleichung ergibt $x_1 = -77$ bzw. $x_2 = 84$. $x_1 = -77$ kommt als Lösung nicht in Frage. $x_2 = 84$ Schüler waren tatsächlich im Kino.

3.127 $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 4\}$; 12 Teilnehmer

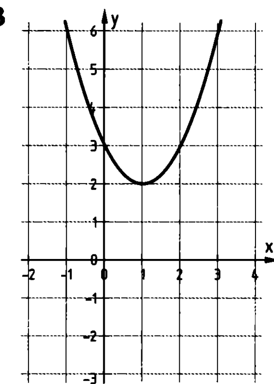
3.128 ***1)*** $-0{,}2x^2 + x + 1 = 0$; 5,854... m
2) In welcher Entfernung von der Abwurfstelle beträgt die Höhe der Kugel über dem Boden 1,5 m?

3.130 $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$; 23 Studierende

3.131 ***1)*** $D = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\}$; 10 Personen
2) Die Aussage ist nicht richtig.
Bei 10 Personen werden $\frac{10}{2} \cdot (10 - 1)$-mal, also 45-mal die Hände geschüttelt. Bei 20 Personen werden $\frac{20}{2} \cdot (20 - 1)$-mal, also 190-mal die Hände geschüttelt.

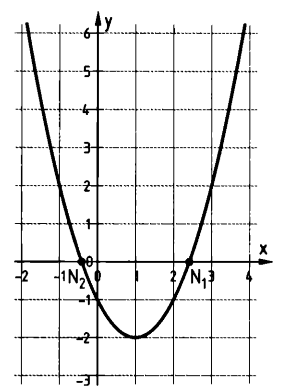
3.132 Setzt man für b = 1, so erhält man a : 1 = (a + 1) : a. Umformen ergibt die Gleichung $a^2 - a - 1 = 0$ mit den Lösungen $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wegen $a_1 < 0$ ist nur $a = a_2$ sinnvoll und man erhält die angegebene Verhältnisgleichung.

3.133



keine Nullstelle

eine Nullstelle



zwei Nullstellen

3.134 ***1)*** Falsch. Je nach Wert der Diskriminante zwei, eine oder keine reelle Lösung.

2) Falsch. Für $q > \left(\frac{p}{2}\right)^2$ bzw. $4ac > b^2$ ist die Diskriminante negativ.

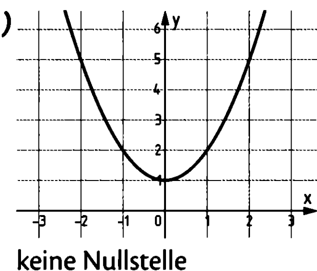
3) Falsch. Die grafische Darstellung ist stets eine Parabel.

4) Richtig. Die Berechnung der Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion führt wegen $f(x) = 0$ genau auf die quadratische Gleichung.

5) Richtig. Berührt die Parabel die x-Achse, gibt es genau eine Nullstelle. Die zugehörige quadratische Gleichung muss daher genau eine reelle Lösung haben. Das ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante null ist.

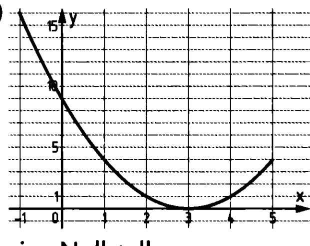
3.135 ***a)*** $S(-7|0)$; nach oben geöffnet
b) $S(1|4)$; nach unten geöffnet
c) $S(-1|-3)$; nach oben geöffnet
d) $S(7|-2)$; nach unten geöffnet

3.136 ***1)***



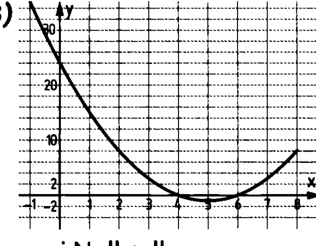
keine Nullstelle

2)



eine Nullstelle

3)



zwei Nullstellen

Die Graphen unterscheiden sich nur in ihrer Lage zum Koordinatenursprung, nicht aber in ihrer Form.

3.137 ***a)*** $y = (x - 2)^2 + 2$ ***b)*** $y = (x + 1)^2 + 3$ ***c)*** $y = (x - 5)^2 - 4$ ***d)*** $y = (x + 3)^2 - 7$

3.138 ***a)*** $S(0|0)$ jeweils

A: $y = x^2$, keine Veränderung zur Grundparabel

B: $y = -2x^2$, Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung um den Faktor 2

C: $y = 3x^2$, Streckung in y-Richtung um den Faktor 3

D: $y = -\frac{1}{2}x^2$, Spiegelung an der x-Achse und Stauchung in y-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$

b) A: $S(0|2)$, $y = x^2 + 2$, Verschiebung in positiver y-Richtung um 2 Einheiten

B: $S(1|1)$, $y = -(x - 1)^2 + 1$, Spiegelung an der x-Achse, Verschiebung in positiver x-Richtung um 1 Einheit und Verschiebung in positiver y-Richtung um 1 Einheit

C: $S(-2|0)$, $y = (x + 2)^2$, Verschiebung in negativer x-Richtung um 2 Einheiten

D: $S(2|1)$, $y = (x - 2)^2 + 1$, Verschiebung in positiver x-Richtung um 2 Einheiten und Verschiebung in positiver y-Richtung um 1 Einheit

c) A: $S(2|-2)$, $y = \frac{1}{4} \cdot (x-2)^2 - 2$, Stauchung in y-Richtung um den Faktor $\frac{1}{4}$, Verschiebung in positiver x-Richtung um 2 Einheiten und Verschiebung in negativer y-Richtung um 2 Einheiten

B: $S(-3|1)$, $y = \frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 1$, Stauchung in y-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$, Verschiebung in negativer x-Richtung um 3 Einheiten und Verschiebung in positiver y-Richtung um 1 Einheit

C: $S(4|1)$, $y = -3 \cdot (x-4)^2 + 1$, Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung um den Faktor 3, Verschiebung in positiver x-Richtung um 4 Einheiten und Verschiebung in positiver y-Richtung um 1 Einheit

D: $S(-1|3)$, $y = -2 \cdot (x+1)^2 + 3$, Spiegelung an der x-Achse, Streckung in y-Richtung um den Faktor 2, Verschiebung in negativer x-Richtung um 1 Einheit und Verschiebung in positiver y-Richtung um 3 Einheiten

3.139 ***a)*** ***1)*** $\{-7; 7\}$ ***2)*** $\{3; 4\}$ ***3)*** $\{-4; 2\}$ ***4)*** $\{0; 5\}$
b) ***1)*** $\{-1{,}5; 3\}$ ***2)*** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ***3)*** $\{\,\}$ ***4)*** $\{-1; 7\}$
c) ***1)*** $\{-6; 0\}$ ***2)*** $\{2; 3\}$ ***3)*** $\left\{-\frac{8}{5}; 0\right\}$ ***4)*** $\{-s; s^2\}$
d) ***1)*** $\{-5; 5\}$ ***2)*** $\{1{,}5\}$ ***3)*** $\left\{-\frac{11}{20}; \frac{11}{20}\right\}$ ***4)*** $\{-11; 0\}$

3.140 ***1)*** Es wurde $p = 3$ statt $p = -3$ verwendet. Die Lösungen sind um drei kleiner als die tatsächlichen Lösungen.
2) Es wurde $q = 4$ statt $q = -4$ verwendet. Es gibt keine reelle Lösung statt tatsächlich zwei reellen Lösungen.
3) Es wurde der Term $-\frac{p^2}{16} + q$ statt der Diskriminante $\frac{p^2}{4} - q$ verwendet. Es gibt keine reelle Lösung statt tatsächlich zwei reellen Lösungen.

3.141 ***a)*** bis ***d)*** Sind die Lösungen gegeben, so kann der Gleichungsterm als Produkt von Linearfaktoren angegeben werden. Ausmultiplizieren der Klammern und Nullsetzen ergibt die Gleichung.
a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ ***b)*** $x^2 - 6x - 7 = 0$ ***c)*** $x^2 + 5x + 6 = 0$ ***d)*** $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$

3.142 ***a)*** $q = -18,\ x_2 = -3$ ***b)*** $p = 17,\ x_2 = -4$ ***c)*** $q = -120,\ x_2 = -15$

3.143 ***a)*** $(x+2)^2;\ L = \{-2\}$ ***b)*** $(x+13)^2;\ L = \{-13\}$ ***c)*** $\left(x + \frac{1}{10}\right)^2;\ L = \left\{-\frac{1}{10}\right\}$ ***d)*** $(x - 0{,}6)^2;\ L = \{0{,}6\}$

3.144 ***a)*** $\left\{-\frac{5}{2}; 5\right\}$ ***b)*** $\{-1: 3\}$ ***c)*** $\{-0{,}755...; 31{,}755...\}$ ***d)*** $\left\{0; \frac{4}{5}\right\}$

3.145 ***a)*** $\{\,\}$ ***b)*** $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ ***c)*** $\{\,\}$

3.146 ***a)*** $\{0{,}240...; 1{,}188...\}$ ***b)*** $\{\,\}$

3.147 ***a)*** $\frac{5 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x+6)}{x+6};\ 3x - 1$ ***c)*** $\frac{(x-4) \cdot (x+4)}{4 \cdot (x-4) \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)};\ \frac{x+4}{4x+1}$ ***e)*** $(x - 18) \cdot (x + 16);\ x + 16$
b) $\frac{5 \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot (x-3)}{(x-3)^2};\ \frac{5x-1}{x-3}$ ***d)*** $\frac{(x-1) \cdot (x+1)}{2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x+1)};\ \frac{x-1}{2x+1}$

3.148 ***a)*** $y = (x+3)^2 - 7;\ S(-3|-7);\ x_1 = -5{,}645...,\ x_2 = -0{,}354...$
b) $y = (x - 3{,}5)^2 - 42{,}25;\ S(3{,}5|-42{,}25);\ x_1 = -3,\ x_2 = 10$
c) $y = (x-4)^2 - 9;\ S(4|-9);\ x_1 = 1,\ x_2 = 7$
d) $y = (x + 1{,}5)^2 - 12{,}25;\ S(-1{,}5|-12{,}25);\ x_1 = -5,\ x_2 = 2$

3.149 ***a)*** $\left\{-\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right\}$ $\left(\text{Mitte der Nullstellen } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \text{ berechnen, Koordinaten des Scheitels } S(0|4) \text{ aus der Funktionsgleichung ablesen, ergibt } x_s = x_m.\right)$

b) $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$ $\left(\text{Mitte der Nullstellen } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2}{3} \text{ berechnen, den Term } 3x^2 - 4x \text{ ergänzen auf } 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \text{ ergibt die Koordinaten des Scheitels } S\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{4}{3}\right) \text{ mit } x_s = x_m.\right)$

c) $\{-8; 4\}$ $\left(\text{Mitte der Nullstellen } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \text{ berechnen, den Term } x^2 + 4x - 32 \text{ ergänzen auf } (x + 2)^2 - 36 \text{ ergibt die Koordinaten des Scheitels } S(-2|-36) \text{ mit } x_s = x_m.\right)$

d) $\left\{-\frac{3}{4}; 5\right\}$ $\left(\text{Mitte der Nullstellen } x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{17}{8} \text{ berechnen, den Term } 4x^2 - 17x - 15 \text{ ergänzen auf } 4 \cdot \left(x - \frac{17}{8}\right)^2 - \frac{529}{16} \text{ ergibt die Koordinaten des Scheitels } S\left(\frac{17}{8}\middle|-\frac{529}{19}\right) \text{ mit } x_s = x_m.\right)$

3.150

	Nullstellen	Bedingungen für keine Nullstelle	Bedingungen für eine Nullstelle	Bedingungen für zwei Nullstellen
a)	$\left\{-\frac{b}{a}; 0\right\}$	nicht möglich	$b = 0, a \neq 0$	$b \neq 0, a \neq 0$
b)	$\{-b; 0\}$	nicht möglich	$b = 0$	$b \neq 0$
c)	$\{-\sqrt{-c}; \sqrt{-c}\}$	$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$
d)	$\left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$	$b^2 < 4ac$	$b^2 = 4ac$	$b^2 > 4ac$
e)	$\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$	$a > 0, c > 0$ oder $a < 0, c < 0$	$a \neq 0, c = 0$	$a < 0, c > 0$ oder $a > 0, c < 0$

3.151 ***1), 2), 3)*** $f(x) = x^2 - 4x$; Methode ***2)***

3.152 ***a)*** $y = 3x^2 - 4x + 7$ ***b)*** $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

3.153 ***a)*** $y = 2x^2 - 4x + 2$ bzw. $y = 18x^2 - 84x + 98$
b) $y = \frac{50}{49}x^2 - \frac{260}{49}x + \frac{338}{49}$ bzw. $y = \frac{18}{49}x^2 - \frac{228}{49}x + \frac{722}{49}$
c) $y = -13{,}5x^2 + 18x - 6$ bzw. $y = -1{,}5x^2 + 6x - 6$

3.154 ***a)*** $y = 2{,}5x^2 + 1$ ***b)*** $y = 1{,}2x^2 + 1{,}2$ ***c)*** $y = -0{,}25x^2 + 0{,}5$

3.155 ***a)*** $y = \frac{1}{4} \cdot (x - 2)^2$ ***b)*** $y = 3 \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{22}{3}$ ***c)*** $y = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{45}{8}$

3.156 ***1)*** Lineare Interpolation: $987{,}7\,\frac{g}{cm^3}$ bei 50 °C, $977{,}22\dot{6}\,\frac{g}{cm^3}$ bei 70 °C,
Näherungsparabel: $987{,}990\,\dot{6}\,\frac{g}{cm^3}$ bei 50 °C, $977{,}808\,\frac{g}{cm^3}$ bei 70 °C
2) Die maximale Abweichung der in ***1)*** berechneten Werte von den im Internet angegebenen Werten beträgt ca. $0{,}5\,\frac{g}{cm^3}$.

3.157 ***a)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $L = \{-16; 3\}$ ***b)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$, $L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-11; -3\}$, $L = \{-4; 13\}$

3.158 ***a)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-4; 1\}$, $L = \{\,\}$ ***b)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $L = \{\,\}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$, $L = D$

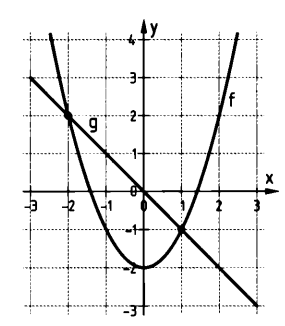
3.159 ***a)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-3; 3\}$, $L = \{2; 9\}$ ***b)*** $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$, $L = \left\{\frac{11}{17}\right\}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}\setminus\{-6; 6\}$, $L = \{\,\}$

3.160 ***1)*** A: Dargestellt ist die Funktion $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 1)$. Die x-Achse hat die Gleichung $g(x) = 0$. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse sind wegen $(x + 2) \cdot (x - 1) = x^2 + x - 2$ bzw. wegen $x^2 + x - 2 = 0$ die Lösungen der angegebenen Gleichung.

B: Dargestellt sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x + 2$. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind wegen $x^2 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ die Lösungen der angegebenen Gleichung.

C: Dargestellt sind die Funktionen $f(x) = (x + 1) \cdot x$ und $g(x) = 2$. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind wegen $(x + 1) \cdot x = x^2 + x$ bzw. wegen $x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ die Lösungen der angegebenen Gleichung.

2) ZB $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = -x$. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind wegen $x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ die Lösungen der angegebenen Gleichung.



3.161

	a)	***b)***	***c)***	***d)***
zwei Nullstellen	$k < \frac{1}{8}$	$k < 4$	$k < -\sqrt{8}$ bzw. $k > \sqrt{8}$	$k > -\frac{25}{4}$
eine Nullstelle	$k = \frac{1}{8}$	$k = 4$	$k = -\sqrt{8}$ bzw. $k = \sqrt{8}$	$k = -\frac{25}{4}$
keine Nullstelle	$k > \frac{1}{8}$	$k > 4$	$-\sqrt{8} < k < \sqrt{8}$	$k < -\frac{25}{4}$

3.162 $x_1 = 2, x_2 = 4, q = 8$

3.163 $x_1 = -6, x_2 = -1, p = 7$ bzw. $x_1 = 1, x_2 = 6, p = -7$

3.164 ***1)*** $p = -4$ bzw. $p = 4$ ***2)*** $|p| > 4$ ***3)*** $|p| < 4$

3.165 ***a)*** $(x + 2) \cdot (x + 3)$ ***c)*** $(x - 3) \cdot (x + 1)$ ***e)*** $(x - 3) \cdot (x - 2)$ ***g)*** $(x + 2) \cdot (x - 1)$
b) $(x + 2) \cdot (x + 1)$ ***d)*** $(x - 3) \cdot (x + 2)$ ***f)*** $(x - 2) \cdot (x - 1)$ ***h)*** $(x + 3) \cdot (x - 2)$

3.166 $D = \mathbb{Z}$; -3 bzw. 3 **3.167** $D = \mathbb{R}^+$; 8 m bzw. 6,5 m **3.168** $D = \mathbb{R}^+$; 2 cm

3.169 ***1)*** Fahrzeug A (2 m Breite): Fahrzeughöhe 3,1 m > maximale Höhe 3,046... m
Fahrzeug B (2,4 m Breite) Fahrzeughöhe 2 m < maximale Höhe 2,187 5 m
Nur Fahrzeug B kann passieren.
2) Fahrzeug A ist um 5,312 5 cm zu hoch.

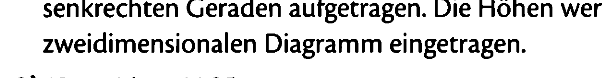
3.170 ***1)*** $y_1 = \frac{2}{27}x^2 - 6$, $y_2 = \frac{14}{81}x^2 - 14$ ***2)*** $y_1 = -\frac{2}{27}x^2 + 6$, $y_2 = -\frac{14}{81}x^2 + 14$
3) Der Teil einer Begrenzungskurve, der positive y-Werte hat, und der Teil, der negative y-Werte hat, müssen mit jeweils einer eigenen Funktion beschrieben werden. Beide Teile zusammen sind nicht der Graph einer Funktion.

3.171 $D = \mathbb{R}^+$; 4 Tage bzw. 12 Tage

3.172 $D = \{x \in \mathbb{Z} | x \geqslant 1\}$; 36 Personen

3.173 ℓ = 1 189,207... mm, b = 840,896... mm
Die Normwerte sind die auf ganze Millimeter gerundeten berechneten Werte.

3.174 ***1)*** Die durch eine quadratische Funktion beschriebenen Höhen werden nicht als Strecken oder Punkte auf einer senkrechten Geraden aufgetragen. Die Höhen werden in einem zweidimensionalen Diagramm eingetragen.

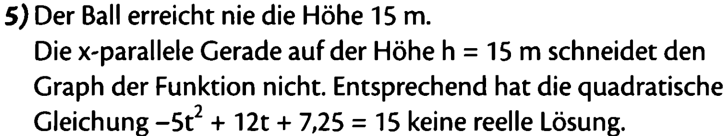


2) 12 m, 14 m, 11,25 m

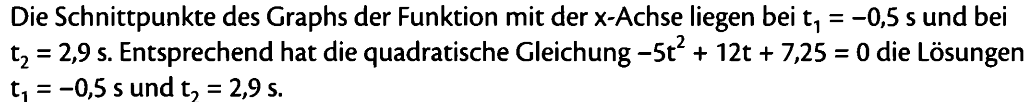
3) t_{max} = 1,2 s, h_{max} = 14,45 m

4) h(0) = 7,25 m, t_2 = 2,4 s
Möglichkeit 1: h(t) = 7,25 m in die Funktionsgleichung einsetzen und die entstehende quadratische Gleichung lösen ergibt t = 0 und den zweiten Zeitpunkt t = 2,4 s.
Möglichkeit 2: Die Zeit bis zum Erreichen der maximalen Höhe beträgt 1,2 s. Nach weiteren 1,2 s muss sich der Ball wieder auf der gleichen Höhe befinden, also nach t = 2 · 1,2 s = 2,4 s.

5) Der Ball erreicht nie die Höhe 15 m.



Die x-parallele Gerade auf der Höhe h = 15 m schneidet den Graph der Funktion nicht. Entsprechend hat die quadratische Gleichung $-5t^2 + 12t + 7{,}25 = 15$ keine reelle Lösung.
Der Ball landet nach 2,9 s am Boden.



Die Schnittpunkte des Graphs der Funktion mit der x-Achse liegen bei t_1 = –0,5 s und bei t_2 = 2,9 s. Entsprechend hat die quadratische Gleichung $-5t^2 + 12t + 7{,}25 = 0$ die Lösungen t_1 = –0,5 s und t_2 = 2,9 s.

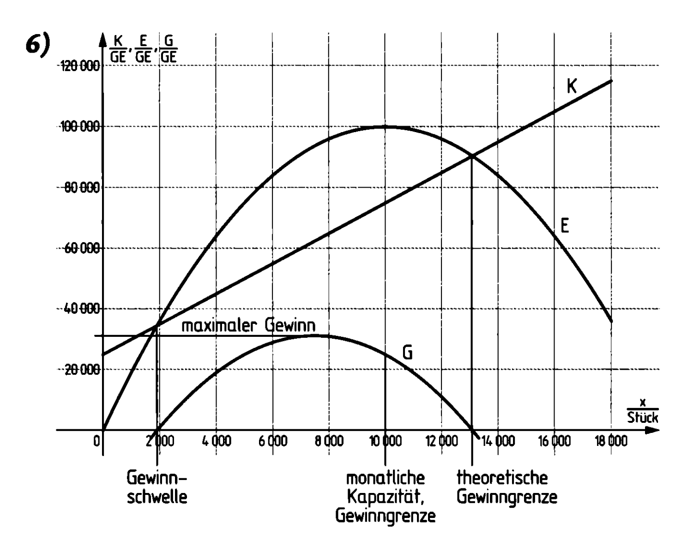
6) Die Geschwindigkeit 12 $\frac{m}{s}$ und die Abwurfhöhe 7,25 m. $\left(\frac{g}{2} \approx 5\,\frac{m}{s^2}\right.$ ist nicht veränderbar.$\left.\right)$

3.175 ***1)*** {–0,090... s; 3,812... s} Die zweite Nullstelle gibt an, wann der Pfeil wieder am Boden auftrifft.
2) 3,721... s
3) S(1,860... s|18,685... m);
Der Scheitelpunkt gibt an, nach welcher Zeit die größte Höhe erreicht wird und wie hoch diese ist.

3.176 ***1)*** 0,116..., früher ***2)*** 3,726... ***3)*** 0,621... ***4)*** 0,305... ***5)*** 10,048... ***6)*** 8,089... ***7)*** 1,226... ***8)*** 0,196 2; 0,147 15

3.177 ***1)*** 25 000 GE
2) 20 GE
3) $p(x) = 20 - 0{,}001x$;
$p(x)$ ist die Umkehrfunktion zu $x(p)$.
4) $K(x) = 25\,000 + 5x$,
$E(x) = -0{,}001x^2 + 20x$,
$G(x) = -0{,}001x^2 + 15x - 25\,000$
5) Gewinngrenze 12 000 Stück
(theoretisch 13 090,169... Stück),
Gewinnschwelle 1 910 Stück
(1 909,830...),
maximaler Gewinn 31 250 GE

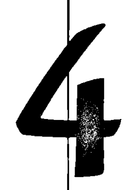
6)



3.178 $D = \mathbb{R}^+$; waagrechte Teilstrecke: $v = 201{,}346...\,\frac{m}{min} \approx 12{,}08\,\frac{km}{h}$, $t = 8{,}939...\,min \approx 9\,min$;
ansteigende Teilstrecke: $v = 198{,}013...\,\frac{m}{min} \approx 11{,}88\,\frac{km}{h}$, $t = 6{,}060...\,min \approx 6\,min$

3.179 $D = \mathbb{N}$; 30 Mädchen, 20 Burschen

3.180 $D = \mathbb{N}$; 8 blaue Kugeln, 10 rote Kugeln; 25 blaue Dosen, 20 rote Dosen

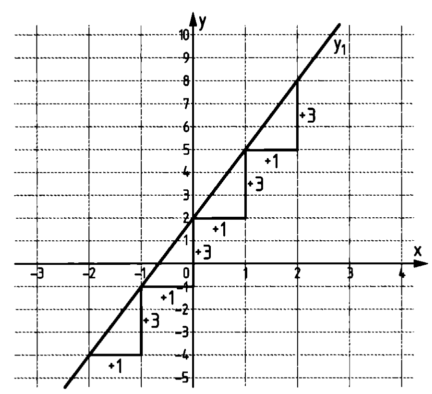


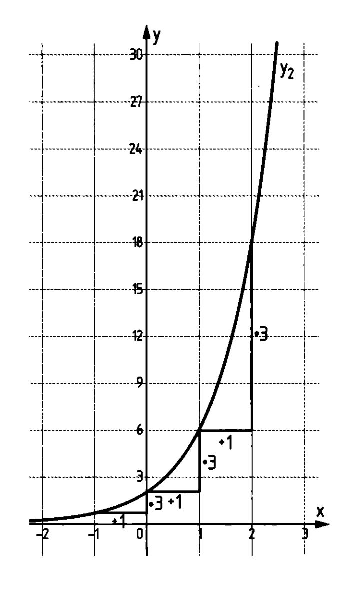
Exponential- und Logarithmusfunktionen

4.1 ***1)*** 32 Personen, 64 Personen bzw. 128 Personen
2) Etwas weniger als 60 Minuten. (Nach 56,438... Minuten sind genau 100 Personen informiert.)
3) Ja. Bereits um 9:40 Uhr sind (theoretisch) 2 048 Personen informiert.
4) Informierte Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter treffen nicht ausschließlich auf uninformierte, weshalb sie Personen, die das Gerücht noch nicht kennen, mit fortschreitender Zeit nicht so leicht finden werden. Außerdem dauert es nicht immer gleich lang – nämlich 10 Minuten – bis das Gerücht weiter getragen wird.

4.2 ***A)*** beschreibt einen exponentiellen Zusammenhang. Wird der x-Wert um 1 erhöht, so wird der y-Wert verdreifacht.
B) beschreibt einen linearen Zusammenhang. Wird der x-Wert um 1 erhöht, so wird der y-Wert um 0,5 vergrößert.
Beim linearen Zusammenhang ist die Steigung konstant. Beim exponentiellen Zusammenhang ist der Faktor, mit dem die y-Werte verändert werden, konstant.

4.3

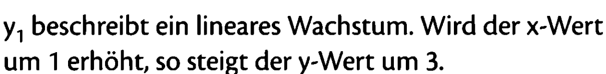




y_1 beschreibt ein lineares Wachstum. Wird der x-Wert um 1 erhöht, so steigt der y-Wert um 3.
y_2 beschreibt ein exponentielles Wachstum. Wird der x-Wert um 1 erhöht, so verdreifacht sich der y-Wert.

4.4 $K(t) = K_0 \cdot 1{,}2^t$

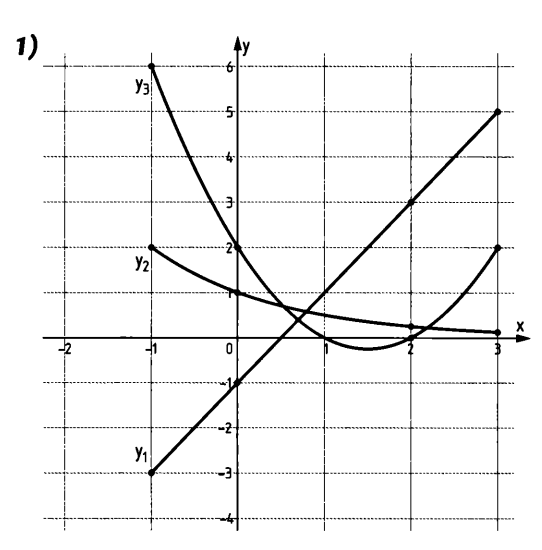
4.5



n	2	3	5	7	9	11	14	19	22	24	26	27	37	53
$1{,}1^n$	1,2	1,3	1,6	1,9	2,4	2,9	3,8	6,1	8,1	9,8	12	13	34	156,2

a) $1{,}1^2 \cdot 1{,}1^7 = 1{,}1^9 \approx 2{,}4$
b) $1{,}1^3 \cdot 1{,}1^5 \cdot 1{,}1^{14} = 1{,}1^{22} \approx 8{,}1$
c) $1{,}1^{26} \cdot 1{,}1^{11} = 1{,}1^{37} \approx 34{,}0$
d) $1{,}1^5 \cdot 1{,}1^{19} = 1{,}1^{24} \approx 9{,}8$
e) $1{,}1^{26} \cdot 1{,}1^{27} = 1{,}1^{53} \approx 156{,}2$

4.6 ***1)***



A: Lineare Funktion, die Steigung beträgt k = 2.
B: Exponentialfunktion, die y-Werte werden jeweils halbiert.
C: Quadratische Funktion, die Punkte liegen auf einer Parabel.

2) A: $y_1 = 2x - 1$ B: $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C: $y_3 = x^2 - 3x + 2$

4.7 ***1)*** Der ursprüngliche Funktionswert wird mit 27 multipliziert.
2) Der ursprüngliche Funktionswert wird durch 9 dividiert.
3) Der ursprüngliche Funktionswert wird quadriert.

4.8 $a = \sqrt{1{,}025}$

4.9 ***1) C)*** ***2) D)*** ***3) A)*** bzw. ***E)*** ***4) B)***

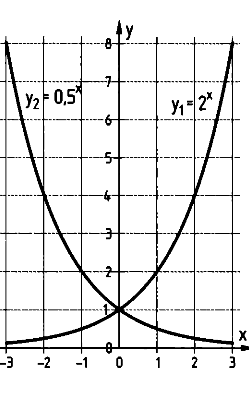
4.10 ***1)*** Lineare Funktion — Die Funktion hat die Form $y = kx + d$.
2) Quadratische Funktion — Die Funktion hat die Form $y = ax^2 + bx + c$.
3) Potenzfunktion — Die Funktion hat die Form $y = x^{-1}$.
4) Exponentialfunktion — Die Funktion hat die Form $y = c \cdot a^x + d$.

4.11 Für $a > 1$ ist die Funktion exponentiell steigend. Die Funktionswerte vergrößern sich um den Faktor a.
Für $0 < a < 1$ ist die Funktion exponentiell fallend. Die Funktionswerte verkleinern sich um den Faktor a.

4.12 ***1)*** ... eine Verschiebung in negativer y-Richtung.
2) ... Stauchung ... in x-Richtung.
3) ... exponentiell wachsend bzw. streng monoton steigend.
4) ... y-Richtung gestaucht.
5) ... dem Unendlichen.
6) ... zueinander symmetrisch.

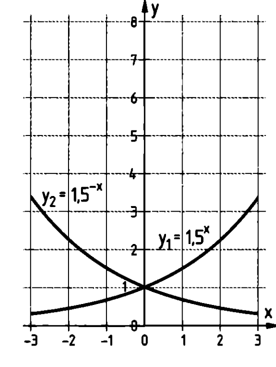
4.13 a)

x	y_1	y_2
−3	0,125	8
−2	0,25	4
−1	0,5	2
0	1	1
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125



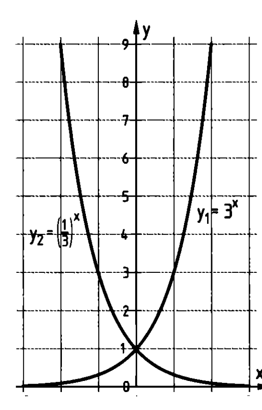
c)

x	y_1	y_2
−3	$0,\dot{2}9\dot{6}$	3,375
−2	$0,\dot{4}$	2,25
−1	$0,\dot{6}$	1,5
0	1	1
1	1,5	$0,\dot{6}$
2	2,25	$0,\dot{4}$
3	3,375	$0,\dot{2}9\dot{6}$



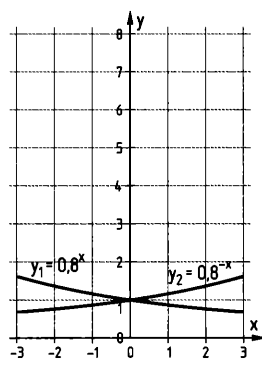
b)

x	y_1	y_2
−3	$0,\dot{0}3\dot{7}$	27
−2	$0,\dot{1}$	9
−1	$0,\dot{3}$	3
0	1	1
1	3	$0,\dot{3}$
2	9	$0,\dot{1}$
3	27	$0,\dot{0}3\dot{7}$



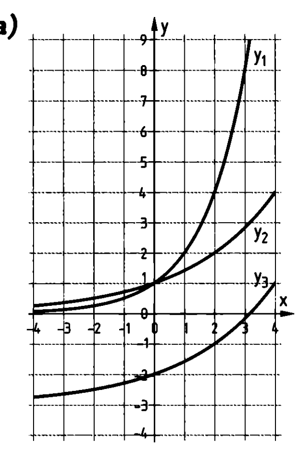
d)

x	y_1	y_2
−3	1,953 125	0,512
−2	1,562 5	0,64
−1	1,25	0,8
0	1	1
1	0,8	1,25
2	0,64	1,562 5
3	0,512	1,953 125



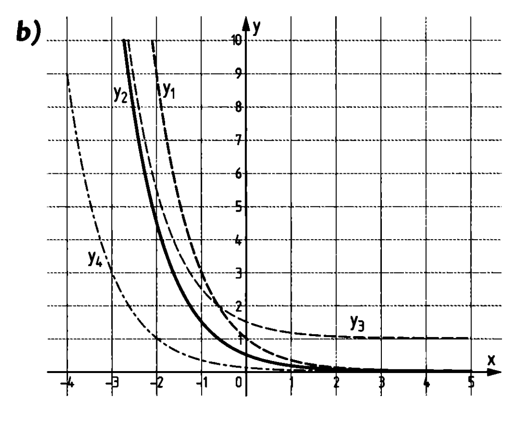
Die Basis der Exponentialfunktion y_1 ist jeweils der Kehrwert der Basis von y_2. Das bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der y-Achse.

4.15 a)



Der Graph von y_1 steigt schneller als jener von y_2 bzw. von y_3. Der Graph von y_3 ist gegenüber dem Graph von y_2 um 3 Einheiten in negativer y-Richtung verschoben.

b)



Der Graph von y_1 bzw. y_4 fällt schneller als jener von y_2 bzw. y_3. Der Graph von y_3 ist gegenüber dem Graph von y_2 um 1 Einheit in y-Richtung verschoben. Der Graph von y_4 ist gegenüber dem Graph von y_1 um 2 Einheiten in negativer x-Richtung verschoben.

4.16 ***1)*** Die beiden Funktionen sind identisch.

2) $1,44^{\frac{x}{2}} = 1,44^{\frac{1}{2} \cdot x} = (1,44^{\frac{1}{2}})^x = 1,2^x$

4.17 – 4.31

4.17 ***1)*** und ***2)*** –
3) y_1 und y_2 haben je zwei Schnittpunkte, y_3 hat einen Schnittpunkt (= Berührpunkt).

4.18 ***1)*** Die beiden Graphen sind fast identisch.
2) 1,098...
Die rechnerische Begründung erfordert die Kenntnis des Logarithmierens (siehe Buch, Seite 97): Anwenden des natürlichen Logarithmus auf $3 = e^a$ ergibt $a = \ln(3)$.

4.19 ***a)*** A: y_5, B: y_3, C: y_1, D: y_2; y_4 ist nicht dargestellt
A: Der Graph ist streng monoton fallend. Die Basis a muss also kleiner 1 sein oder im anderen Fall der Exponent negativ. Dies trifft auf y_2 und y_5 zu. An der Stelle $x = 1$ ist der y-Wert etwas größer als $\frac{1}{3}$, das trifft auf y_5 zu, also ist die gesuchte Funktion y_5.
B: Der Graph ist streng monoton steigend. Die Basis a muss also größer 1 sein oder im anderen Fall der Exponent negativ. Dies trifft auf y_1, y_3 und y_4 zu. An der Stelle $x = 1$ ist der y-Wert $\frac{3}{2}$, also ist die gesuchte Funktion y_3.
C: Der Graph ist streng monoton steigend. Die Basis a muss also größer 1 sein oder im anderen Fall der Exponent negativ. Dies trifft auf y_1, y_3 und y_4 zu. An der Stelle $x = 1$ ist der y-Wert 2, also ist die gesuchte Funktion y_1.
D: Der Graph ist streng monoton fallend. Die Basis a muss also kleiner 1 sein oder im anderen Fall der Exponent negativ. Dies trifft auf y_2 und y_5 zu. An der Stelle $x = -1$ ist der y-Wert $\frac{3}{2}$, also ist die gesuchte Funktion y_2.
b) A: y_4, B: y_1, C: y_3, D: y_2; y_5 ist nicht dargestellt
c) A: y_2, B: y_1, C: y_4, D: y_3; y_5 ist nicht dargestellt
Begründungen bei ***b)*** und ***c)*** analog zu ***a)***.

4.21 Es ist analog zu 4.20 vorzugehen – vgl. Buch, Seite 86.

4.29 ***1)*** linearer Zusammenhang
2) exponentieller Zusammenhang
3) exponentieller Zusammenhang
4) linearer Zusammenhang

4.30 ***1) B)*** ***2) C)*** ***3) D)*** ***4) A)***

4.31 ***A)*** Die Basis ist größer als 1.
1) Die Funktionswerte nähern sich dem Wert unendlich, da Potenzen mit einer Basis größer als 1 bei größer werdendem Exponenten größer werden.
2) Die Funktionswerte nähern sich dem Wert null, da Potenzen mit einer Basis größer als 1 bei kleiner werdendem negativen Exponenten einer Division von 1 durch einen größer werdenden Divisor entsprechen.
B) Die Basis ist kleiner als 1.
1) Die Funktionswerte nähern sich dem Wert null, da Potenzen mit einer Basis kleiner als 1 bei größer werdendem Exponenten einer Division von 1 durch einen größer werdenden Divisor entsprechen.
2) Die Funktionswerte nähern sich dem Wert unendlich, da Potenzen mit einer Basis kleiner als 1 bei kleiner werdendem negativen Exponenten größer werden.
C) $2 \cdot e^{-4x} = 2 \cdot (e^{-4})^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{e^4}\right)^x$, die Basis ist also kleiner als 1.
1) und ***2)*** analog zu ***B)***. Die Multiplikation mit 2 verändert diese Tendenz nicht.
D) $e^{-x} + 4 = \left(\frac{1}{e}\right)^x + 4$, die Basis ist also kleiner als 1.
1) Die Funktionswerte nähern sich dem Wert 4, da sich die Funktionswerte von $\left(\frac{1}{e}\right)^x$ dem Wert null nähern. Anschließend wird 4 addiert.
2) analog zu ***B) 2)***. Die Addition von 4 verändert diese Tendenz nicht.

4.32 ***a)*** 1,15 ***b)*** 0,93 ***c)*** 2 ***d)*** 0,5

4.33 ***a)*** $\sqrt{2}$ ***b)*** $2 \cdot \sqrt{2}$ ***c)*** $8 \cdot \sqrt{2}$ ***d)*** $\sqrt[4]{2}$

4.34 ***a)*** $U(t) = U_0 \cdot 2^{\frac{t}{5} \cdot \frac{1}{\text{Jahre}}}$ ***b)*** $U(t) = U_0 \cdot 3^{\frac{t}{10} \cdot \frac{1}{\text{Jahre}}}$

4.35 ***A)*** → ***2)***, Logistischer Wachstumsvorgang
B) → ***3)***, Sättigungsvorgang
C) → ***1)***, Aperiodischer Schwingungsvorgang

4.36 Durch den Punkt $P(0|N_0)$. $t = 0$ in die Funktionsgleichung einsetzen ergibt $N(0) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0}$. Wegen $e^{-\lambda \cdot 0} = 1$ ist der Funktionswert $N(0) = N_0$.

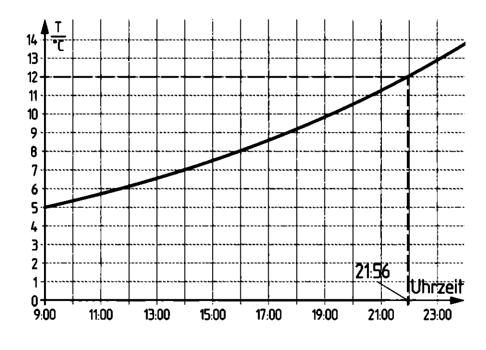
4.37 $t = 0$ in die Funktionsgleichung einsetzen ergibt $y(0) = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 0})$. Wegen $e^{-\lambda \cdot 0} = 1$ ist das Produkt auf der rechten Seite $c \cdot (1 - 1) = 0$ und daher $y(0) = 0$.
Der Wert des Terms $e^{-\lambda t} = \frac{1}{e^{\lambda t}}$ wird für größer werdendes t wegen des größer werdenden Nenners immer kleiner. Für sehr große Werte von t geht er gegen null. Der Klammerausdruck $(1 - e^{-\lambda t})$ geht daher für große Werte von t gegen 1 und man erhält $y = c \cdot 1$, also $y = c$.

4.38 Lösung mit TI-Nspire: Die Funktion und die Asymptote $y = 2$ zeichnen. Die Tangente im Punkt $(0|0)$ der Funktion einzeichnen. Die Tangentengleichung $y = 6t$ ermitteln. Die Gerade $y = 6t$ zeichnen. Den Schnittpunkt $\left(\frac{1}{3}\middle|2\right)$ der Tangente $y = 6t$ mit der Asymptote $y = 2$ ermitteln ergibt den Wert $t_1 = \frac{1}{3}$.
63,212... % des Endwerts

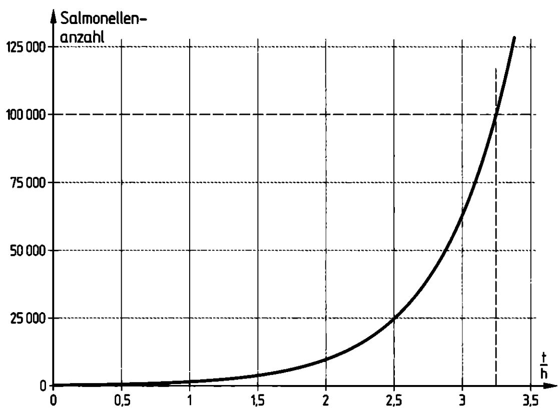
4.39 Um 12:55 Uhr.

4.40 ***1)*** 70 °C ***2)*** Nach 25 Minuten. ***3)*** 20 °C

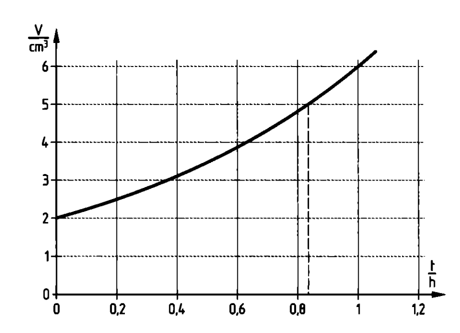
4.41 ***1)*** $T(t) = 5\,°C \cdot 1{,}07^{\frac{t}{h}}$
2) Um ca. 21:56 Uhr (nach 12,939... Stunden).



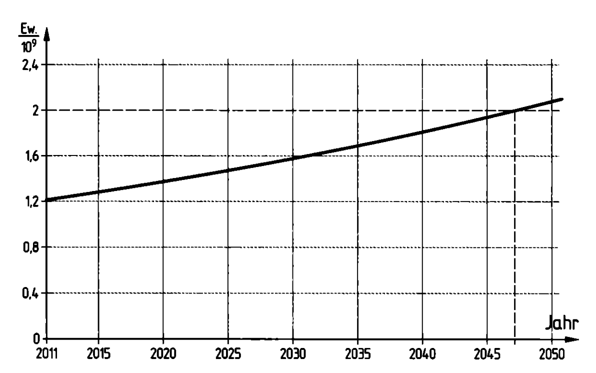
4.42 ***1)*** $y(t) = 200 \cdot 320^{\frac{t}{3h}}$
2) 3,232... h ≈ 3 h 14 min



4.43 **1)** $V(t) = 2\ \text{cm}^3 \cdot 3^{\frac{t}{h}}$
2) 0,834... h ≈ 50 min



4.44 **1)** $y(t) = 1{,}21 \cdot 10^9 \cdot 1{,}014^{\frac{t}{\text{Jahre}}}$
2) Im Jahr 2047 (2047,145...).

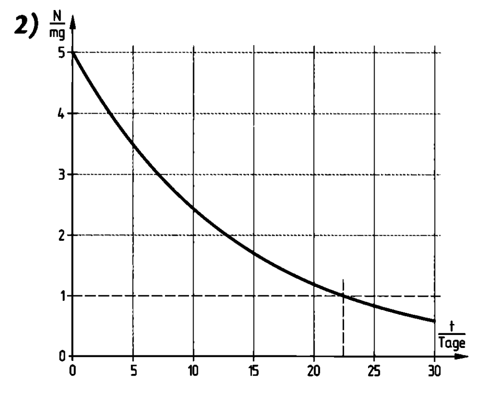


4.45 ... 8 Personen bekannt. Alle 240 Minuten verdreifacht ... (alle 480 Minuten verneunfacht ..., alle 720 Minuten versiebenundzwanzigfacht ... usw.).

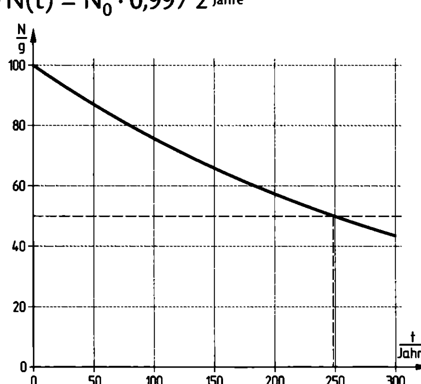
4.46 ... 0,5 Meter um 5 Prozent ...

4.47 **1)** $N(t) = N_0 \cdot 0{,}75^{\frac{t}{4\,d}}$
3) 9,637... Tage
4) 19,407... % ≈ 19,4 % nach 3 Tagen
39,555... % ≈ 39,6 % nach 7 Tagen
5) 22,378... Tage ≈ 22 Tage

2)

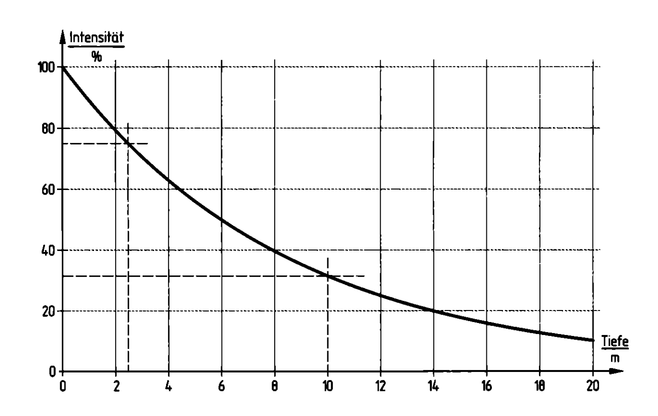


4.48 **1)** $N(t) = N_0 \cdot 0{,}9972^{\frac{t}{\text{Jahre}}}$



2) 92,969... g ≈ 93 g
3) 5,453... % ≈ 5,45 %
4) 247,205... Jahre ≈ 247 Jahre

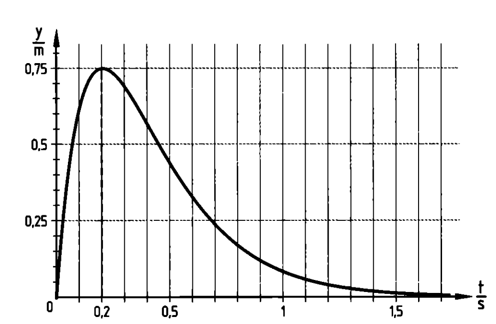
4.49 ***1)*** 31,181... % ≈ 31,2 %
2) $I(d) = I_0 \cdot 0{,}89^{\frac{d}{m}}$
3) 2,468... m ≈ 2,47 m



4.50 ***1)*** – ***2) a)*** 89,548... % ***b)*** 26,903... % ***3)*** 6,714... Tage ≈ 7 Tage ***4)*** 20 %

4.51 ***1)*** 59,873... % ≈ 59,9 % ***2)*** 64,151... % ≈ 64,2 %

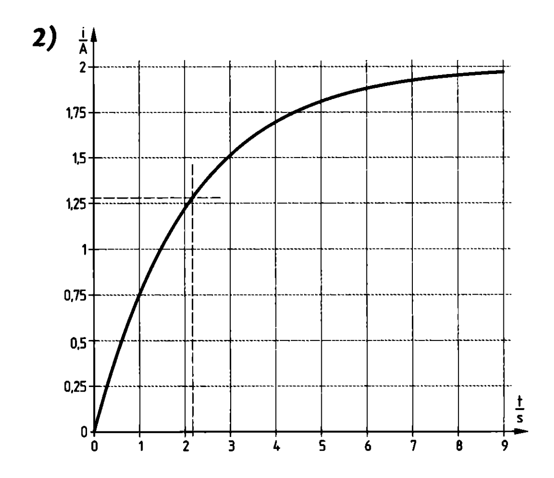
4.52



Der Umkehrzeitpunkt liegt bei ca. 0,2 Sekunden.

4.53 ***1)*** 1,511... A ≈ 1,51 A nach 3 Sekunden
1,925... A ≈ 1,93 A nach 7 Sekunden
3) 2,173... s ≈ 2,17 s

2)

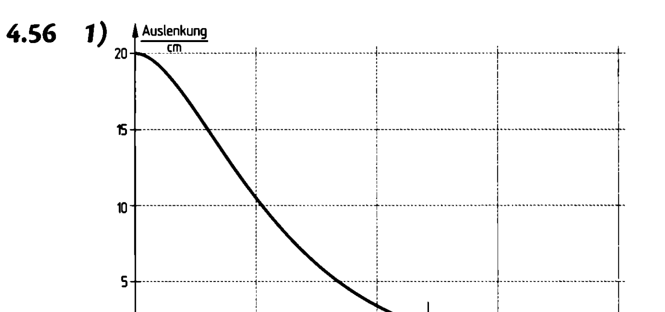


4.54 ***1)*** –
2) 138 Angestellte bzw. 1 996 Angestellte
3) 4,655... Tage, 7,600... Tage bzw. 8,699... Tage
4) Logistischer Wachstumsvorgang

4.55 ***1)*** $y(t) = \frac{2\,000}{1 + 1\,999 \cdot e^{-\frac{1{,}312}{d} \cdot t}}$ ***2)*** 5,792... Tage

4.56 – 4.70

4.56 ***1)***



2) 20 cm
3) 0,243... s ≈ 0,24 s

4.57 ***1)*** Weltbevölkerung $7{,}110 \cdot 10^9$ Menschen (2012); $y(t) = 2{,}1 \cdot 10^9 \cdot 1{,}019...^{\frac{t}{\text{Jahre}}}$
2) 2 017,995... ⇒ Im Jahr 2018 (Schätzung Statistik Austria ca. im Jahr 2025)

4.58 ***1)*** $f(x) = 2^x$ ***2)*** 32 Lagen
3) Nach dem siebenten Mal Falten. y ist gegeben, x muss berechnet werden.

4.60 ***a)*** 2 ***b)*** −1 ***c)*** 2 ***d)*** 2 ***e)*** $\frac{1}{2}$

4.61 ***a)*** 3 ***b)*** −4 ***c)*** −4 ***d)*** $-\frac{3}{2}$ ***e)*** $-\frac{1}{10}$

4.62 ***a)*** 1 ***b)*** 2 ***c)*** −1 ***d)*** −3 ***e)*** $\frac{1}{3}$

4.63 ***a)*** 4 ***b)*** −3 ***c)*** $\frac{1}{3}$ ***d)*** −3 ***e)*** $-\frac{2}{3}$

4.64 ***a)*** 5 ***b)*** 0 ***c)*** 1 ***d)*** 2 ***e)*** $\frac{1}{2}$

4.65 ***1)*** $x = \log_3(27)$ ***2)*** $x = \text{lb}\left(\frac{1}{4}\right)$ ***3)*** $m = \log_k(r)$

4.66 ***C)***

4.67 ***A)*** Falsch, denn $\ln(e^a) = a \neq e$.
B) Richtig, denn $\log_{\sqrt{6}}(36) = \log_{\sqrt{6}}(6^2) = \log_{\sqrt{6}}((\sqrt{6})^4) = 4$.
C) Richtig, denn $\text{lb}(1024) = \log_2(2^{10}) = 10$.
D) Falsch, denn $\log_5(\sqrt{5}) = \log_5(5^{\frac{1}{2}}) = 0{,}5 \neq -0{,}5$.

4.68 ***a)*** Potenzieren, $x = 4^3 \Rightarrow x = 64$
b) Wurzelziehen, $x^8 = \frac{1}{729} \Rightarrow x = \sqrt[8]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$
c) Logarithmieren, $0{,}5^x = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 0{,}5^6 \Rightarrow x = 6$
d) Potenzieren, $x = (\sqrt{2})^8 \Rightarrow x = 16$

4.69 ***1)*** $\log_b(x) = 2 \Rightarrow x = b^2$, quadrieren ergibt $x^2 = b^4 \Rightarrow \log_b(x^2) = 4$.
2) $\log_b(x) = a \Rightarrow x = b^a$, Exponent mit 2 erweitern ergibt $x = b^{2 \cdot \frac{a}{2}} = (b^2)^{\frac{a}{2}} \Rightarrow \log_{b^2}(x) = \frac{a}{2}$.
3) $\log_b(x) = a \Rightarrow x = b^a$, Wurzelziehen ergibt $\sqrt{x} = \sqrt{b^a} = b^{\frac{a}{2}} \Rightarrow \log_b(\sqrt{x}) = \frac{a}{2}$.
4) $\log_{\sqrt{b}}(x) = a \Rightarrow x = (\sqrt{b})^a = b^{\frac{a}{2}}$, Exponent mit 2 erweitern ergibt
$x = b^{2 \cdot \frac{a}{4}} = (b^2)^{\frac{a}{4}} \Rightarrow \log_{b^2}(x) = \frac{a}{4}$.

4.70 ***a) 1)*** $\frac{1}{\lg(7)}$ ***2)*** $\frac{\ln(10)}{\ln(7)}$ ***c) 1)*** $\frac{\lg(5)}{\lg(2)}$ ***2)*** $\frac{\ln(5)}{\ln(2)}$ ***e) 1)*** $\frac{2}{\lg(e)}$ ***2)*** $\ln(100)$
b) 1) $\frac{\lg(23)}{\lg(4)}$ ***2)*** $\frac{\ln(23)}{\ln(4)}$ ***d) 1)*** $\lg(0{,}3)$ ***2)*** $\frac{\ln(0{,}3)}{\ln(10)}$

4.72 Rechenregeln siehe Buch, Seite 100, grüner Kasten

a) $\ln(4) + 3 \cdot \ln(a)$

b) $\log(x + y) + \log(x - y)$

c) $3 \cdot \log(x) + \log(y) + 2 \cdot \log(z)$

d) $\ln(a) + 2 \cdot \ln(b) - \frac{1}{3} \cdot \ln(c)$

e) $\frac{2}{3} \cdot \ln(a) + \frac{1}{3} \cdot \ln(b)$

f) $\frac{4}{5} \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(a) - 3 \cdot \log(b) - 5 \cdot \log(c) - \log(4)$

g) $3 \cdot \log(x) - 2 \cdot \log(y) + \log(z)$

h) $\frac{1}{2} \cdot \log(3) + \log(s) + 5 \cdot \log(t) - \log(5) - \log(x) - \log(z) + \frac{3}{2} \cdot \log(m) + \frac{1}{2} \cdot \log(n) - \frac{1}{2} \cdot \log(a - b)$

4.73 ***1)*** Falsch. Der Logarithmus einer Summe kann nicht zerlegt werden.

2) Falsch. Der Logarithmus einer Summe kann nicht zerlegt werden.

3) Falsch. Alle Faktoren im Nenner erhalten ein Minus.

4) Falsch. Der Exponent 4 gilt nur für das x und nicht für die Zahl 3. Alle Faktoren im Nenner erhalten ein Minus.

4.75 ***a)*** $\log(3ab)$ ***c)*** $\log\left(\sqrt{\frac{a^3}{b}}\right)$ ***e)*** $\log(x - 1)$ ***g)*** $\ln\left(\frac{2x}{y}\right)$

b) $\ln\left(\frac{x^2}{2}\right)$ ***d)*** $\ln(a^2b)$ ***f)*** $\lg\left(\frac{\sqrt[3]{(a+b)\cdot(a-b)^2}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{100a}}\right)$ ***h)*** $\lg\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$

4.76 ***1)*** $\log(243) = \log(3^5) = 5 \cdot \log(3)$, Logarithmus einer Potenz

2) $\ln(9) = \ln(3 \cdot 3) = \ln(3) + \ln(3)$, Logarithmus eines Produkts

3) $\ln(0,5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = 0 - \ln(2) = -\ln(2)$, Logarithmus eines Quotienten

4.77 ***1)*** Der Faktor y^4 muss im Zähler stehen, da der Summand positiv ist.

2) $\ln(z + b)$ kann nicht in den Logarithmus eines Produkts umgeformt werden.

4.78 Nach 6 Würfen.

4.81 ***a)*** $\{2,5\}$ ***b)*** $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ ***c)*** $\{2\}$ ***d)*** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

4.82 ***a)*** $\{0\}$ ***b)*** $\{1\}$ ***c)*** $\{-6,5\}$ ***d)*** $\{0\}$

4.83 bis 4.85: Auf die Dokumentation des Rechenwegs wird verzichtet.

4.83 ***a)*** {1,760...} ***b)*** {4,754...} ***c)*** {−1,874...} ***d)*** {2,655...}

4.84 ***a)*** {3,167...} ***b)*** {0,708...} ***c)*** {0,341...} ***d)*** {−4,605...}

4.85 ***a)*** {−0,283...} ***b)*** {0,511...} ***c)*** {0,048...} ***d)*** {−3,218...}

4.86 ***a)*** {2} ***b)*** {−1} ***c)*** {−1,566...; 1,566...} ***d)*** {−0,405...; 0,693...}

4.87 ***1)*** Die Basis 4 in eine Zweierpotenz umformen ergibt $2^{x+3} = (2^2)^4$. Rechenregel für das Potenzieren von Potenzen anwenden ergibt $2^{x+3} = 2^8$. Logarithmus zur Basis 2 anwenden ergibt $x + 3 = 8$ bzw. $x = 5$.

2) Die Gleichung durch 3^{-1} dividieren ergibt $\frac{3^{2x+1}}{3^{-1}} = 5^{2x+2}$. Rechenregel für das Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis anwenden ergibt $3^{2x+2} = 5^{2x+2}$. Diese Gleichung ist nur dann wahr, wenn der Exponent null ist. Es ist daher $2x + 2 = 0$ bzw. $x = -1$.

3) Die Basis 4 in eine Zweierpotenz umformen ergibt $(2^2)^{3x+1} = 6 \cdot 2^{x-2}$. Rechenregel für das Potenzieren von Potenzen anwenden und durch 2^{x-2} dividieren ergibt $2^{5x+4} = 6$. Gleichung zB mit dem natürlichen Logarithmus logarithmieren ergibt $(5x + 4) \cdot \ln(2) = \ln(6)$. Umformen ergibt $x = -0,283...$

4.88 S(−3|0)

4.89 ***B)*** $4 \cdot 2^x \neq 8^x$, da Potenzen mit verschiedenen Basen und verschiedenen Exponenten nicht miteinander multipliziert werden können; $4 \cdot 2^x = 8$ dividiert durch 4 $\Rightarrow$ $2^x = 2$. Anwenden des Logarithmus zur Basis 2 $\Rightarrow$ $x = 1$.

C) $2 \cdot 3^x \neq 6^x$, da Potenzen mit verschiedenen Basen und verschiedenen Exponenten nicht miteinander multipliziert werden können; $2 \cdot 3^x = 6$ dividiert durch 2 $\Rightarrow$ $3^x = 3$. Anwenden des Logarithmus zur Basis 3 $\Rightarrow$ $x = 1$.

D) Auf die Anwendung des Logarithmus zur Basis 10 wurde auf der rechten Seite der Gleichung vergessen; $5^{2x} = 2$ $\Rightarrow$ Anwenden des Logarithmus zur Basis 10 ergibt $2x \cdot \lg(5) = \lg(2)$ und umformen ergibt $x = \frac{\lg(2)}{2 \cdot \lg(5)}$.

4.90 ***1)*** Richtig. Eine Gleichung der Form $f(x) = a^x$ heißt Exponentialgleichung. Die gesuchte Variable steht im Exponenten.

2) Falsch, $e^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \ln(3) \Rightarrow x = \frac{\ln(3)}{2}$.

3) Nein, wenn die Basen verschieden sind, führt ein Exponentenvergleich nicht zum Ziel.

4) Richtig, $e^{-2x \cdot \ln(2)} = e^{-x \cdot 2 \cdot \ln(2)} = e^{-x \cdot \ln(2^2)} = (e^{\ln(4)})^{-x} = 4^{-x}$.

4.91 ***a)*** $t = 0$ ***b)*** $x = z \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ***c)*** $z = x \cdot \ln\left(\frac{1-b}{a}\right)$

4.92 ***a)*** $t = -\frac{\ln\left(\frac{n-m}{a}\right)}{b}$ ***b)*** $t = \frac{\ln\left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right)}{1 - \ln\left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right)}$ ***c)*** $t = b \cdot \ln\left(a - (s-1)^2\right)$

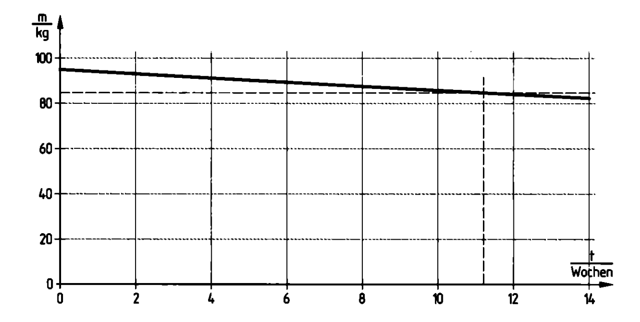
4.93 ***a)*** $\lambda = \frac{\ln\left(\frac{w}{y}\right)}{\ln\left(\frac{w}{y}\right) - \ln(a)}$ ***b)*** $t = -\frac{\ln\left(\frac{V}{s} - a\right)}{\omega \cdot \ln(b)}$ ***c)*** $x = \frac{\ln\left(\frac{r^a + r^b}{r^a - r^b}\right)}{\ln(r)}$

4.94 ***a)*** $s = \frac{\ln(t)}{\ln(t_1) - \ln(t_1 - t_2)}$ ***b)*** $r_a = 2 \cdot \lg\left(\frac{u}{2}\right) + r_b$ ***c)*** $x = \frac{\ln\left(\frac{aB}{rt} - e^{3y}\right)}{2}$

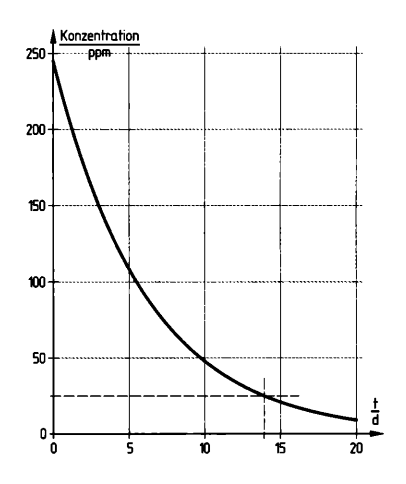
4.96 ***a)*** L = {1} ***b)*** L = {−0,852...} ***c)*** L = {−2,658...; 1,885...}

4.98 ***1)*** 15,591...%
2) im Jahr 2013 (5,157... Jahre nach 2008)
3) im Jahr 2013 (1,511... Jahre nach 2012)
4) im Jahr 2014 (6,122... Jahre nach 2008)

4.99 ***1)*** $y(t) = 95\text{ kg} \cdot 0{,}99^{\frac{t}{\text{Wochen}}}$
2) 87,660... kg ≈ 87,7 kg
3) 11,066... Wochen ≈ 11 Wochen



4.100 ***1)*** 78,541... ppm ≈ 78,5 ppm bzw. 32,057... % ≈ 32,1 %
2) 14,043... Tage ⇒ nach 15 Tagen



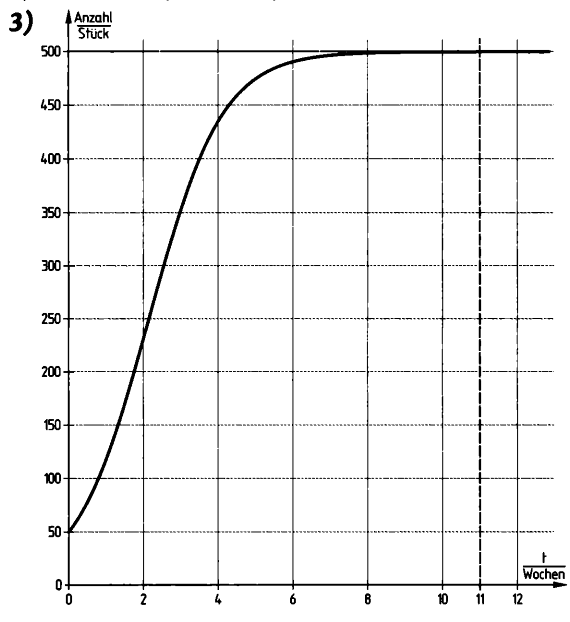
4.101 ***1)*** $A(t) = 20 \cdot 1{,}020...^{\frac{t}{d}}$ ***2)*** 149 Tage (148,989...) ***3)*** 68 Tage (67,320...)
4) In der Realität haben Hasen bis zu 5 Würfe pro Jahr und gebären ca. 6 Junge pro Wurf. Faktoren wie Lebensraum, Futtervorkommen, natürliche Feinde, Zeugungsfähigkeit usw. beeinflussen die Vermehrung. Nach dem Modell wären es nach 200 Tagen 1 229 Tiere, nach 300 Tagen 9 637 Tiere und nach 400 Tagen bereits 75 560 Tiere. Das ist nicht realistisch. Ein Modell, das das Wachstum der Hasenpopulation besser beschreiben könnte, wäre zB ein Sättigungsvorgang oder ein logistisches Wachstum.

4.102 ***1)*** $m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}1155... \frac{1}{h} \cdot t}$ ***2)*** 6,25 % ***3)*** 30,353... h

4.103 ***1)*** theoretisch 151,279... Jahre
2) theoretisch 21,744... %; dieser Prozentsatz ist allerdings unrealistisch. Nur durch Verzinsung ist daher eine so große Steigerung der Kapitalhöhe innerhalb von 15 Jahren nicht zu erwarten.

4.104 0,551... %

4.105 ***1)*** 168 Fische (168,205...)
2) 479 Fische (478,809...)
3)



Theoretisch wird die Kapazitätsgrenze nie erreicht. In der Realität wird die Kapazitätsgrenze von 500 Fischen nach ca. 11 Wochen erreicht. Abhängig von verschiedenen Faktoren wie zB Nahrungs- oder Platzangebot kann sie aber auch nie erreicht oder überschritten werden.

4.106 ***1)***

y in ASA	100	200	400	800	1 600
x in DIN	21	24,010...	27,020...	30,030...	33,041...

2) $y = 100 \cdot 10^{\frac{x - 21°}{10°}}$

4.107 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{10^5\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \left\{\frac{1}{e^2}\right\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{100\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{e^3\}$

4.108 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$; $L = \{315{,}227...\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{0{,}449...\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$; $L = \{-8{,}023...\}$
d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{1}{2}\right\}$; $L = \{3{,}253...\}$

4.109 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$; $L = \{4\}$ ***b)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{\ \}$ ***c)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{0{,}033\,9...\}$

4.110 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$; $L = \{1{,}001...; 998{,}998...\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$; $L = \{4\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$; $L = \{3{,}630...\}$

4.111 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$; $L = \{3\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$; $L = \{\ \}$

4.112 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$; $L = \{\ \}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{12{,}269...\}$

4.113 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{10^{13{,}483...}\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{e^3; e^4\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{0{,}029...; 10^{6{,}531...}\}$

4.114 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{10\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{100\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{1; e\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$; $L = \{0{,}303...; 3{,}296...\}$

4.115 ***1)*** Falsch. Beim Lösen von Logarithmusgleichungen muss eine Definitionsmenge bestimmt werden, da Logarithmen nur für positive reelle Zahlen definiert sind.
2) Falsch. Logarithmusgleichungen können im Allgemeinen nur grafisch oder numerisch gelöst werden. Die analytische Lösung ist nur in Sonderfällen möglich.
3) Richtig. Eine Gleichung wird dann als Logarithmusgleichung bezeichnet, wenn die Variable im Numerus (Argument) eines Logarithmus vorkommt.
4) Falsch. Eine Logarithmusgleichung kann nur in Sonderfällen analytisch, zB durch Potenzieren, gelöst werden.

4.116 ***a)*** $z = z_0 \cdot 10^{\frac{T}{20}}$ ***b)*** $s = t \cdot e^{t^2 - a}$ ***c)*** $a = 10b$

4.117 ***a)*** $t = \frac{1}{b} \cdot e^{\frac{r}{sC^2}}$ ***b)*** $w = w_1 \cdot e^{\frac{\lambda_1^2}{a^2 s}}$ ***c)*** $x = x_0^{\frac{\kappa_1^2}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}$

4.118 ***a)*** $t = e^{\frac{(1 - \Delta T) \cdot a_2}{a_1}} - 1$ ***b)*** $s = 10^{1 - \frac{C - b}{2}}$ ***c)*** $x = y \cdot e^{\frac{v_1 - v_2}{2a \cdot (1 - r)}}$

4.119 ***1)***

p	$p_0 = 20\ \mu Pa$	$3{,}162... \cdot p_0$	$10 \cdot p_0$	$20 \cdot p_0$	$10^4 \cdot p_0$	$10^5 \cdot p_0$	$3{,}162... \cdot 10^6 \cdot p_0$
L_p in dB	0	10	20	26,020...	80	100	130

2) 6,020... dB

4.120 ***1)*** 97,501... dB ***2)*** 0,915... dB ***3)*** 68,377... %

4.122 ***1)*** Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.
2)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p(n)	–	0,301...	0,176...	0,124...	0,096...	0,079...	0,066...	0,057...	0,051...	0,045...

3) Nach dem Benford'schen Gesetz sollten 4,576... % aller Datensätze mit der Ziffer 9 beginnen. Der angegebene Prozentsatz ist mehr als doppelt so hoch. Es ist davon auszugehen, dass die Bilanz gefälscht wurde.

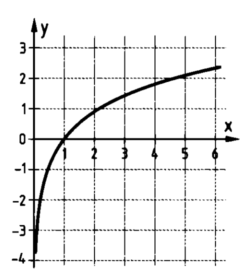
4.123 ***1)*** 8 ***2)*** Im Zahlensystem zur Zahl 20.

4.124 2,642... pc = 8,153... $\cdot 10^{13}$ km

4.125 ***a)*** $y = \log_2(x)$ ***b)*** $y = -\log_3(x)$ ***c)*** $y = \ln(x)$ ***d)*** $y = -\log_4(x)$ ***e)*** $y = \lg(x)$

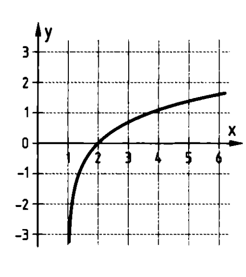
4.126 ***a)*** $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

x	y
0,2	−2,096...
0,6	−0,665...
0,8	−0,290...
1	0
2	0,903...
3	1,431...
4	1,806...
5	2,096...
6	2,334...



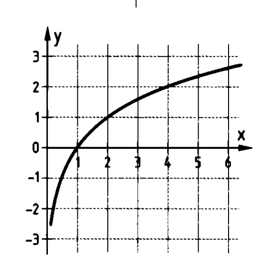
c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

x	y
1,2	−1,609...
1,6	−0,510...
1,8	−0,223...
2	0
3	0,693...
4	1,098...
5	1,386...
6	1,609...



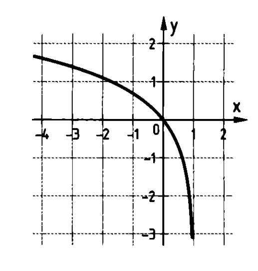
e) $D = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

x	y
0,2	−2,321...
0,6	−0,736...
0,8	−0,321...
1	0
2	1
3	1,584...
4	2
5	2,321...
6	2,584...



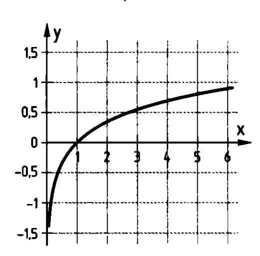
g) $D = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$

x	y
−4	1,609...
−3	1,386...
−2	1,098...
−1	0,693...
0	0
0,2	−0,223...
0,5	−0,693...
0,8	−1,609...



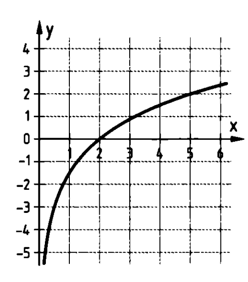
b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

x	y
0,2	−0,804...
0,6	−0,255...
0,8	−0,111...
1	0
2	0,346...
3	0,549...
4	0,693...
5	0,804...
6	0,895...



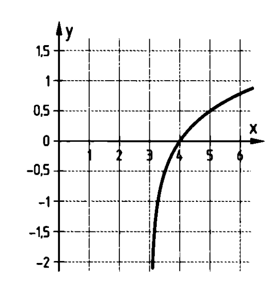
d) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

x	y
0,2	−5
0,6	−2,614...
0,8	−1,989...
1	−1,505...
2	0
3	0,880...
4	1,505...
5	1,989...
6	2,385...



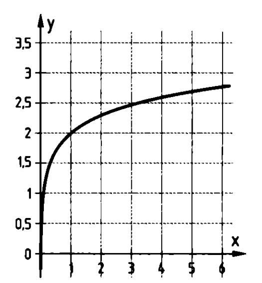
f) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$

x	y
3,2	−1,160...
3,6	−0,368...
3,8	−0,160...
4	0
5	0,5
6	0,792...



h) $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

x	y
0,2	1,301...
0,6	1,778...
0,8	1,903...
1	2
2	2,301...
3	2,477...
4	2,602...
5	2,698...
6	2,778...



4.127 ***1)*** $d \in]0{,}047\ldots\,\text{m}\,|\,1\,\text{m}[$

2)

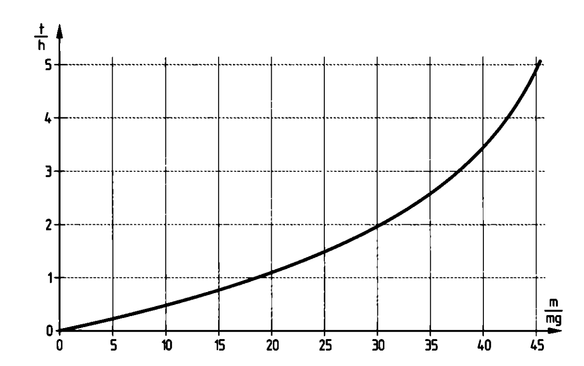
Alter/Jahre
160
140
120
100
80
60
40
20
0
59,914
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
d/m

3) Mindestens 59,914... Jahre.

4) $d = \frac{e^{\frac{t}{20\,\text{Jahre}}}}{e^{\frac{t}{20\,\text{Jahre}}} + 20}$

4.128 ***1)*** $t = 1{,}982\ldots\,\text{h}$ bzw. $t = 3{,}482\ldots\,\text{h}$

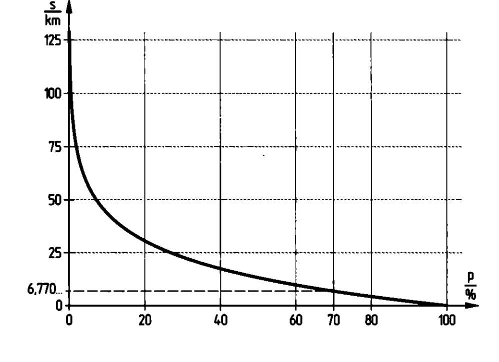
2) $t(m) = \frac{1{,}5\,\text{h} \cdot \ln\left(1 - \frac{m}{50\,\text{mg}}\right)}{\ln(0{,}5)}$



4.129 ***1)*** $I(s) = 100\,\% \cdot 0{,}9^{\frac{1}{2\,\text{km}} \cdot s}$, 13,157... km

2) $s(I) = \frac{2}{\lg(0{,}9)} \cdot \lg\left(\frac{I}{100\,\%}\right)$ km,

$s(70\,\%) = 6{,}770\ldots$ km



3) C) und ***D)*** sind richtig.

A) beschreibt eine exponentielle Zunahme der Intensität um 8 % pro Kilometer.

B) beschreibt eine exponentielle Zunahme der Intensität um 92 % pro Kilometer.

C) ergibt umgeformt $s \cdot \ln(0{,}92) = \ln(I) - \ln(I_0)$ bzw. $\ln(I) = \ln(I_0 \cdot 0{,}92^s)$.
Umformen auf eine Exponentialgleichung mit der Basis e und Anwenden des Zusammenhangs $e^{\ln(x)} = x$ ergibt die Exponentialfunktion $I(s) = I_0 \cdot 0{,}92^s$.

D) ergibt umgeformt $\lg(0{,}92^s) = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Umformen auf eine Exponentialgleichung mit der Basis 10 und Anwenden des Zusammenhangs $10^{\lg(x)} = x$ ergibt $0{,}92^s = \frac{I}{I_0}$. Multiplikation mit I_0 ergibt die Exponentialfunktion $I(s) = I_0 \cdot 0{,}92^s$.

C) und ***D)*** beschreiben daher eine Abnahme der Intensität um 8 % pro Kilometer.

4.130 ***1)*** $y(x) = 0{,}001\,t \cdot 1\,000^{\frac{x}{2}}$ ***2)*** $x(y) = 2 + \frac{2}{3}\lg\left(\frac{y}{t}\right)$ ***3)*** Erdbebenstärke 3,500...

4.131 ***1)*** 1 Einheit = 1 cm ***2)*** 25 Einheiten = 1 cm (A4-Blatt im Querformat)

4.133

I II III IV V VI VII
10^0 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8

St. Petersburg 3,845... Mio. Einwohner ≈ 4 Mio. Einwohner

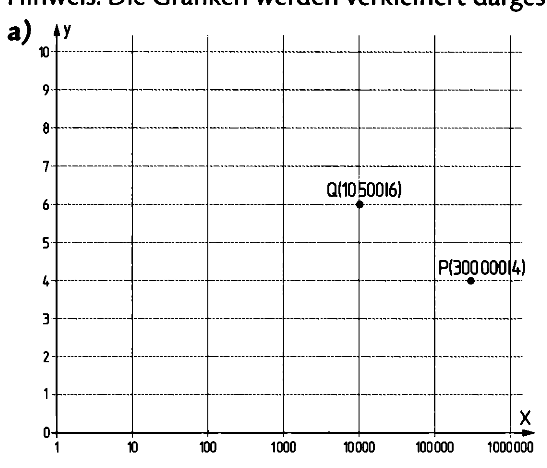
4.134 I II VI III IV V Heute

10^{10} 10^{9} 10^{8} 10^{7} 10^{6} 10^{5} 10^{4} 10^{3} 10^{2} 10^{1} 10^{0}

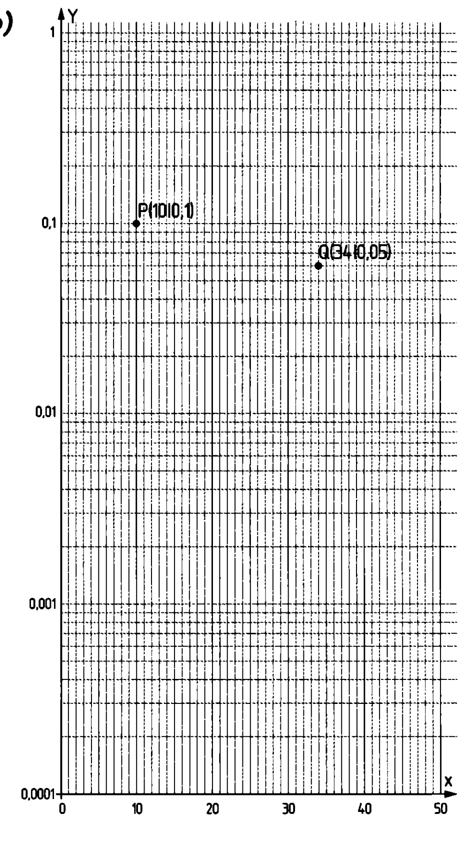
Dinosaurier: 223,872... Mio. Jahre ≈ 220 Mio. Jahre (bei einer 20 cm langen Skala)

4.136 Hinweis: Die Grafiken werden verkleinert dargestellt.

a)



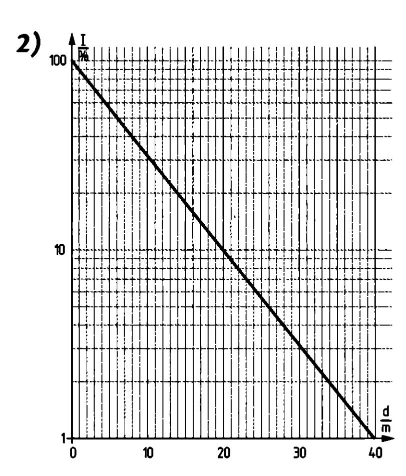
b)



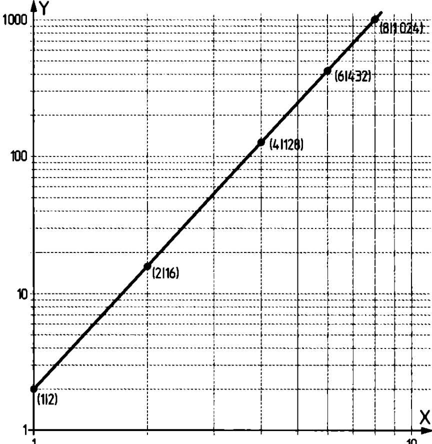
4.137 ***a)*** $y = 10 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$ ***b)*** $y = \sqrt[3]{10^{10x-13}}$ ***c)*** $y = \sqrt{x}$

4.138 ***1)*** $y(x) = 10^{20} \cdot 0{,}999\,971...^{x}$ ***2)*** 24 000 Jahre ***3)*** 96 000 Jahre

4.139 ***1)*** $I(d) = I_0 \cdot 0{,}89^{\frac{d}{m}}$ ***2)***



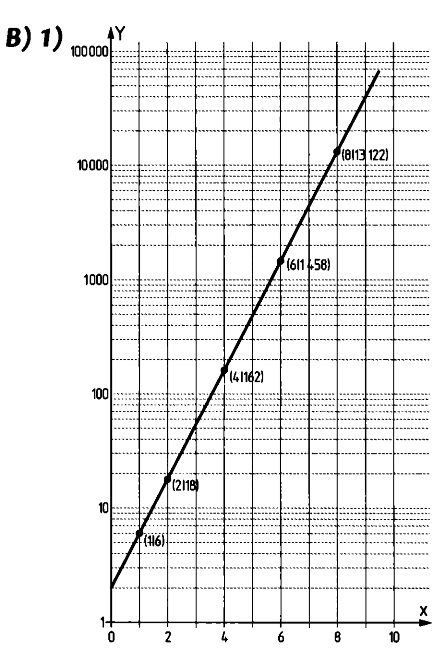
4.140 ***A) 1)***



Eintragen der angegebenen Wertepaare in ein doppeltlogarithmisches Koordinatensystem ergibt eine Gerade. In ***A)*** ist daher eine Potenzfunktion gegeben.

2) $y = 2 \cdot x^3$

B) 1)



Eintragen der angegebenen Wertepaare in ein ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem ergibt eine Gerade. In ***B)*** ist daher eine Exponentialfunktion gegeben.

2) $y = 2 \cdot 3^x$

4.141 Umformen von $y = \log_a(x^b) + c$ liefert $y = \frac{b}{\lg(a)} \cdot \lg(x) + c$.
Da das Koordinatensystem abszissenlogarithmisch ist, gilt $X = \lg(x)$ und daher $y = \frac{b}{\lg(a)} \cdot X + c$.
Dies ist die Gleichung einer linearen Funktion mit Steigung $\frac{b}{\lg(a)}$ und Ordinatenabschnitt c.

4.143 4,053... m

4.144 ***a)*** $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \frac{1}{4} \cdot (e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4} \cdot (e^x - e^{-x})^2 = ... = \frac{1}{2} \cdot (e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh(2x)$

b) $2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = ... = \frac{1}{2} \cdot (e^{2x} - e^{-2x}) = \sinh(2x)$

4.145 $\cosh(x) = 1{,}031...$, $\tanh(x) = 0{,}244...$

4.146 ***a)*** Aus $y = \operatorname{arcosh}(x)$ folgt $x = \cosh(y)$ bzw. $x = \frac{1}{2} \cdot (e^y + e^{-y})$.
Umformen ergibt die quadratische Gleichung $(e^y)^2 - 2x \cdot e^y + 1 = 0$.
Für $x \geqslant 1$ folgt aus der Lösung $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ das Ergebnis $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

b) Aus $y = \operatorname{artanh}(x)$ folgt $x = \tanh(y)$ bzw. $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$. Umformen ergibt $(e^y)^2 = \frac{1 + x}{1 - x}$.
Für $|x| < 1$ folgt aus der Lösung $e^y = +\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ das Ergebnis $y = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$.

4.147 ***a)*** y_1: A, y_2: C, y_3: keine Zuordnung, y_4: D, B: $y = 2^x - 1$
b) y_1: A, y_2: C, y_3: keine Zuordnung, y_4: D, B: $y = 0{,}5 \cdot e^{-x}$

4.148 ***a)*** $a = 1{,}2$; $c = 15$; $y_p = 53{,}747...$ ***b)*** $a = 0{,}16$; $c = 625$; $x_p = 3$

4.149 ***1)*** $K(n) = 350{,}00\ € \cdot 1{,}05^{\frac{n}{\text{Jahre}}}$ ***2)*** $m(t) = 200 \cdot 9^{\frac{t}{h}}$ ***3)*** $n(t) = 15 \cdot \frac{t}{d} + 200$

4.150 ***a)*** wird viermal so groß

b) verkleinert sich auf $\frac{1}{4}$ des ursprünglichen Werts

c) verkleinert sich auf $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ des ursprünglichen Werts

d) vergrößert sich um den Faktor $4^{\frac{1}{2}} = 2$

e) vergrößert sich um den Faktor $4^{2a} = 16^a$

f) verkleinert sich auf $\frac{1}{4^a}$ des ursprünglichen Werts

4.151 ***1)*** $y = 100 + 5 \cdot \frac{t}{s}$, ***2)*** $y = 100 \cdot 2^{\frac{t}{h}}$, ***3)*** $y = 100 - 2 \cdot \frac{t}{d}$, ***4)*** $y = 100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{d}}$, ***5)*** $y = 100 \cdot 0{,}97^{\frac{t}{d}}$

4.152 ***1)*** ... anfänglich 5 Blattläuse. Alle 180 Minuten verdoppelt sich ... (alle 360 Minuten vervierfacht sich ..., alle 540 Minuten verachtfacht sich ... usw.).

2) ... anfangs 300 Liter ... um 25 Liter.

4.153 $t = -\frac{\ln(2)}{\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$

4.154 Der Schallpegel wird mit $L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ dB berechnet.

1) Bei zehnfacher Intensität gilt $L_{10} = 10 \cdot \lg\left(\frac{10 \cdot I}{I_0}\right)$ dB. Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen ergibt $L_{10} = 10 \cdot \left(\lg(10) + \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)\right)$ bzw. $L_{10} = L + 10$ dB. Der Schallpegel nimmt um 10 dB zu.

2) Bei halber Intensität gilt $L_{\frac{1}{2}} = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{2 \cdot I_0}\right)$ dB. Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen ergibt $L_{\frac{1}{2}} = 10 \cdot \left(\lg\left(\frac{1}{2}\right) + \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)\right)$ bzw. $L_{\frac{1}{2}} = L - 3{,}010...$ dB. Der Schallpegel nimmt um 3,010... dB ab.

4.155 ***a)*** 5, weil $3^5 = 243$

b) $\frac{1}{3}$, weil $b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}$

c) 4, weil $10^4 = 10\,000$

d) −2, weil $y = \ln(x)$ und $y = e^x$ zueinander inverse Funktionen sind.

e) $-\frac{2}{5}$, weil $e^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^{-2}}$

f) −5, weil $10^{-5} = \frac{1}{100\,000}$

g) 2, weil $(2b)^2 = 4b^2$

h) −1, weil $10^{-1} = \sqrt{0{,}01}$

i) −1, weil $4^{-1} = 0{,}25$

j) $\frac{1}{2}$, weil $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

4.156 ***a)*** $\log(2) + \log(x) - \log(3) - 2 \cdot \log(y)$

b) $\frac{1}{2} \cdot \log(3) + \frac{1}{2} \cdot \log(z) - \frac{1}{2} \cdot \log(x - y)$

c) $\ln(2a + 3v) + \ln(2a - 3v)$

d) $\ln(8) + \ln(w) - \ln(5) - \ln(s) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t)$

e) $\frac{1}{2} \cdot \ln(3) + \frac{1}{2} \cdot \ln(a) + \frac{2}{3} \cdot \ln(x) - \ln(7) - \ln(n)$

4.157 ***1)*** Der Exponent 4 bezieht sich nur auf die Basis a, daher $\log(2) + 4 \cdot \log(a)$ statt $4 \cdot \log(2a)$. Die Variable d steht im Nenner, daher $-\log(d)$ statt $\log(d)$.

2) Eine Rechenregel für Logarithmen zur Zerlegung von Summen gibt es nicht, daher $\log(x^2 + y^2)$ statt $2 \cdot \log(x) + 2 \cdot \log(y)$. Die Zerlegung des Nenners ergibt $(x - y) \cdot (x + y)$, beide Faktoren stehen im Nenner, daher $-\log(x + y)$ statt $\log(x + y)$.

4.158 ***a)*** $-\log(64x^6)$ ***b)*** $\ln\left(\frac{2a^3}{e}\right)$ ***c)*** $\ln(x + 1)$

4.159 ***1)*** Der Faktor $\frac{1}{3}$ bezieht sich nur auf log(a), daher c^4 statt $\sqrt[3]{c^4}$. Ein Summand ergibt einen Term im Zähler, daher muss c^4 im Zähler statt im Nenner stehen.

2) Die Summe $(c + d)$ kann nicht in ein Produkt umgeformt werden, daher $(c + d)$ statt $(c \cdot d)$.

4.160 ***a)*** $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ ***b)*** $\left\{-\frac{6}{5}\right\}$ ***c)*** $\{9\}$ ***d)*** $\{1\}$

4.161 ***a)*** 3 ***b)*** 0,620... ***c)*** 1,464... ***d)*** 3,584...

4.162 ***a)*** $D =]-2; \infty[$; $L = \{10^{18} - 2\}$ ***b)*** $D =]3; \infty[$; $L = \{5{,}302...\}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}^+$; $L = \{0{,}157...\}$

4.163 ***a)*** $D =]2; \infty[$; $L = \{2{,}044...\}$ ***b)*** $D =]0; 1[$; $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

4.164 ***a)*** $D = \mathbb{R}^+$; $L = \{e^2\}$ ***b)*** $D = \mathbb{R}^+$; $L = \{100\}$ ***c)*** $D = \mathbb{R}^+$; $L = \{e; e^3\}$

4.165 ***a)*** $x = \frac{\lg\left(\frac{T}{T_0}\right)}{\lg\left(\frac{p \cdot T_0}{p_1 \cdot T}\right)}$ ***c)*** $t = b \cdot \ln((2 - w)^2 - x)$ ***e)*** $y = -\ln\left(e^x - \frac{s \cdot t}{a \cdot r}\right)$

b) $t = e^{\frac{w \cdot \ln(t_1) - \Theta_0}{c}}$ ***d)*** $t = \frac{t_1}{e^{\frac{v_1 - v_2}{s}}}$ ***f)*** $t = \ln\left(\frac{x_1 - x + 1}{y - y_1}\right)$

4.166 ***a)*** $y_A \approx 50$ (40,386...) ***b)*** $x_A \approx 8\,300$ (8 343,134...)

4.167 ***a)*** doppeltlogarithmisches Koordinatensystem
b) abszissenlogarithmisches Koordinatensystem
c) ordinatenlogarithmisches Koordinatensystem

4.168 ***a)*** $y = 2 \cdot \lg(x)$ ***b)*** $y = 0{,}05 \cdot 80^{\frac{x}{4}}$ ***c)*** $y = 0{,}1 \cdot x^2$

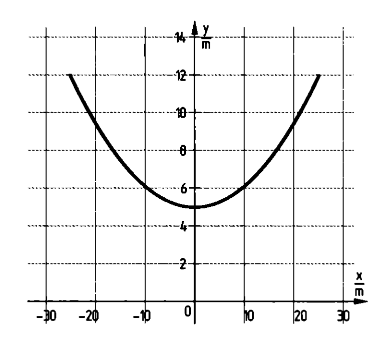
4.169 Mond $384 \cdot 10^3$ km, Sonne $149{,}6 \cdot 10^6$ km, α-Centaurie $41{,}23 \cdot 10^{12}$ km, Magellan'sche Wolke $1{,}47 \cdot 10^{18}$ km

Mond | Sonne | α-Centaurie | Magellan'sche Wolke
10^4 10^6 10^8 10^{10} 10^{12} 10^{14} 10^{16} 10^{18} 10^{20}

4.170 ***a)*** $RS = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^y - e^{-y})$ ausmultiplizieren und zusammenfassen, ergibt $\frac{1}{2} \cdot (e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x + y) = LS$

b) $RS = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^y - e^{-y})$ ausmultiplizieren und zusammenfassen, ergibt $\frac{1}{2} \cdot (e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x + y) = LS$

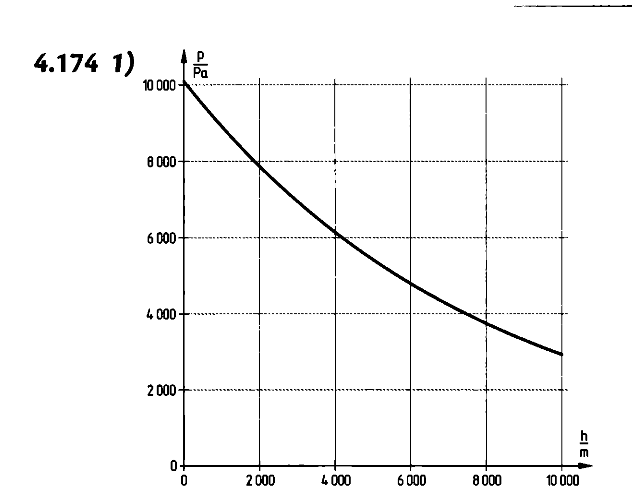
4.171 ***1)*** $a = 45{,}764...$
$b = -40{,}764...$
2) $y = 0{,}011\,2 \cdot x^2 + 5$
Die beiden Graphen sind im dargestellten Bereich praktisch identisch.



4.172 ***1)*** 0,012... %, 1,202... % bzw. 70,170... % ***2)*** 2,654... % ***3)*** 5 248,311... Jahre

4.173 ***1)*** 0,05 Meter ist die Länge der Liane bei der Auspflanzung. $4^{\frac{t}{\text{Monat}}}$ gibt an, dass sich die Länge der Liane pro Monat vervierfacht.
2) $\sqrt{2} = 1{,}414...$
3) 204,80 m; nach mehr als 2,660... Monaten

4.174 ***1)***



2) 101 325 Pa

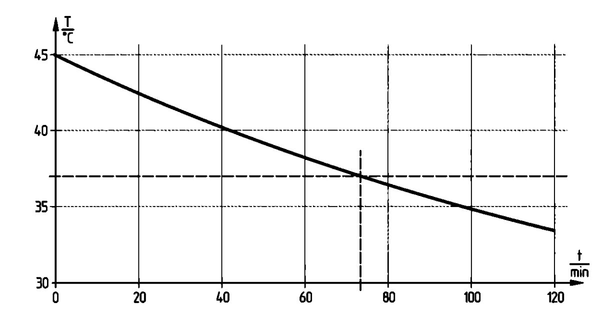
3) 62 994,566... Pa ≈ 63 000 Pa bzw.
33 484,663... Pa ≈ 33 500 Pa

4) 5 538,939... m ≈ 5 540 m

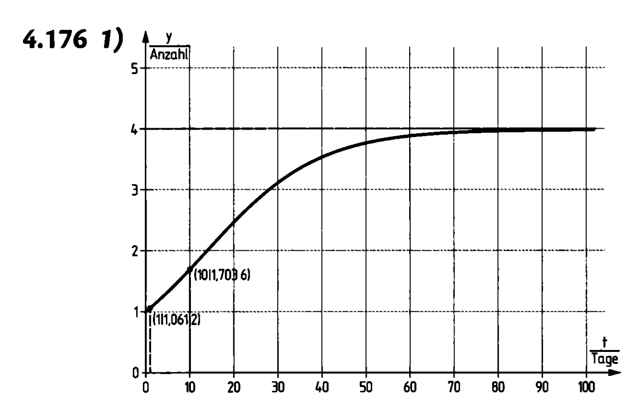
5) 13,932... % ≈ 13,9 %

4.175 ***1)*** $T(t) = (45\ °C - 20\ °C) \cdot e^{-\frac{0{,}005\,81... \cdot t}{min}} + 20\ °C$

2) 66,358... min (Körpertemperatur 37 °C)



4.176 ***1)***



Der Funktionswert nähert sich dem konstanten Wert 4 zunächst rascher, dann immer langsamer. Es liegt ein Sättigungsvorgang vor.

2) 1 Smartphone nach einem Tag (1,061...), 2 Smartphones nach 10 Tagen (1,703...)

5 Trigonometrie

5.1

Formel	*1)* 30°	*2)* 70°	*3)* 90°	*4)* 110°	*5)* 150°
$x = 80\text{ cm} \cdot \cos(\alpha)$	69,282… cm	27,361… cm	0 cm	−27,361… cm	−69,282… cm
$y = 80\text{ cm} \cdot \sin(\alpha)$	40 cm	75,175… cm	80 cm	75,175… cm	40 cm

x: Gegenzahlen für 30° und 150° bzw. für 70° und 110°
y: Gleiches Ergebnis für 30° und 150° bzw. für 70° und 110°

5.5 ***a)*** 60° ***b)*** 270° ***c)*** 75° ***d)*** 200° ***e)*** 306°

5.6 ***a)*** $\frac{\pi}{6}$ ***b)*** $\frac{3\pi}{4}$ ***c)*** $\frac{4\pi}{3}$ ***d)*** $\frac{13\pi}{12}$ ***e)*** $\frac{23\pi}{12}$

5.7 ***1)*** 90°, $\frac{\pi}{2}$ ***2)*** 60°, $\frac{\pi}{3}$ ***3)*** 720°, 4π ***4)*** 540°, 3π ***5)*** 45°, $\frac{\pi}{4}$ ***6)*** 22,5°, $\frac{\pi}{8}$

5.8

	100°	311°	62°	180°	238°	392°	680°
sin(α)	+	−	+		−	+	−
cos(α)	−	+	+	−	−	+	+
tan(α)	−	−	+		+	+	−

5.9 bis 5.12: Auf die Veranschaulichungen mithilfe des Einheitskreises wird verzichtet.

5.9 ***a)*** = ***b)*** = ***c)*** = ***d)*** < ***e)*** < ***f)*** <

5.10 ***a) 1)*** und ***2)*** grün: sin(90°), orange: cos(70°) = cos(290°)
b) 1) und ***2)*** lila: sin(60°) = sin(120°), grün: tan(155°) = tan(335°)
c) 1) und ***2)*** grün: cos(0°), braun: tan(50°) = tan(230°)

5.11 ***1)*** 233,130… ° ≈ 233° bzw. 306,869…° ≈ 307°
2) 53,130…° ≈ 53° bzw. 306,869…° ≈ 307°
3) 21,801…° ≈ 22° bzw. 201,801…° ≈ 202°

5.12 ***a)*** 43° ***b)*** 45° ***c)*** 70° ***d)*** 15° ***e)*** 10°

5.13

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
sin(α)	0,422…	−0,866…	−0,422…	0,819…
cos(α)	0,906…	−0,5	0,906…	−0,573…
tan(α)	0,466…	1,732…	−0,466…	−1,428…

5.14 Es werden jeweils grafische Begründungen verlangt, die analog zu Buch, Seite 127, vorzunehmen sind.

5.15 ***a) 1)*** 1. bzw. 2. Quadrant ***2)*** Nein ***3)*** 1. bzw. 3. Quadrant
b) 1) 3. bzw. 4. Quadrant ***2)*** 1. bzw. 4. Quadrant ***3)*** 2. bzw. 4. Quadrant
c) 1) Nein ***2)*** 2. bzw. 3. Quadrant ***3)*** 2. bzw. 4. Quadrant
Die Funktionswerte der Sinus- und der Cosinusfunktion können nur Werte von −1 bis 1 annehmen. Die Funktionswerte der Tangensfunktion können alle reellen Werte annehmen.

5.16 ***a)*** 0° bzw. 180° ***b)*** 180° ***c)*** 30° bzw. 150° ***d)*** 45° bzw. 225°

5.17 ***a)*** $\frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{3\pi}{2}$ ***b)*** $\frac{\pi}{2}$ ***c)*** $\frac{\pi}{3}$ bzw. $\frac{5\pi}{3}$ ***d)*** $\frac{3\pi}{4}$ bzw. $\frac{7\pi}{4}$

5.18 ***a)*** 107,354…° bzw. 287,354…° ***b)*** 8,626…° bzw. 171,373…°
c) 214,055…° bzw. 325,944…° ***d)*** 141,260…° bzw. 218,739…°
e) 63,256…° bzw. 296,743…° ***f)*** 42,614…° bzw. 222,614…°

5.19 ***a)*** 0,120... rad bzw. 3,021... rad ***c)*** 2,286... rad bzw. 5,428... rad ***e)*** 1,383... rad bzw. 4,524... rad
b) 0,554... rad bzw. 5,728... rad ***d)*** 1,854... rad bzw. 4,428... rad ***f)*** 3,959... rad bzw. 5,464... rad

5.20 ***1)*** Richtig.
2) Falsch. $\alpha_1 = 123{,}69°$, $\alpha_2 = 303{,}69°$
Vorzeichenfehler: Der Taschenrechner gibt als Ergebnis von $\tan^{-1}(-1{,}5)$ den Wert $-56{,}31°$ aus und nicht den verwendeten Wert $56{,}31°$.
3) Falsch. $\alpha_1 = 45{,}57°$ ist richtig, $\alpha_2 = 314{,}43°$
Fehler: Der verwendete Zusammenhang $\cos(\alpha) = \cos(180° - \alpha)$ ist nicht richtig. Es muss der Zusammenhang $\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$ verwendet werden.
4) Falsch. $\alpha_1 = 64{,}16°$, $\alpha_2 = 115{,}84°$
Fehler: Der Taschenrechner ist irrtümlich auf Bogenmaß eingestellt.

5.21 ***a)*** 173,107...°; $x = -0{,}992...$ ***b)*** 325,249...°; $x = 0{,}821...$ ***c)*** 72,542...°; $y = 0{,}953...$

5.22 Es werden jeweils grafische Veranschaulichungen analog zu Buch, Seite 127 verlangt.

5.23

	Minutenzeiger	Stundenzeiger
a)	(−5 cm|−8,660... cm)	(4,053... cm|4,423... cm)
b)	(10 cm|0 cm)	(−5,543... cm|−2,296... cm)
c)	(−5 cm|8,660... cm)	(−3,223... cm|5,060... cm)

5.24 ***a)*** $F_R = 162{,}921...$ N; $\varphi = 151{,}004...°$
b) F entspricht dem Radius des Kreises. Die x-Komponente entspricht dem Cosinus, die y-Komponente dem Sinus des Winkels.

5.25 Zahlenstrahl mit markierten Punkten: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$
Skala: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π

5.26 Es entsteht eine Kurve ähnlich dem Graphen der Sinus- bzw. Cosinusfunktion durch die Auf- und Ab-Bewegungen des Stifts in Kombination mit der Bewegung des Papiers nach links.

5.27 ***a) 1)*** Siehe Buch, Seite 133 ***2)*** Maximum: $\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$, Minima: $\left(-\frac{\pi}{2}\middle|-1\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-1\right)$
b) 1) Siehe Buch, Seite 134 ***2)*** Maxima: $(0|1)$, $(2\pi|1)$; Minimum: $(\pi|-1)$

5.28 Siehe Buch, Seite 134

5.29 ***a) 1)*** ..., $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$, ... ***2)*** ..., $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$, ...
b) 1) ..., $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$, ... ***2)*** ..., $[\pi; 2\pi]$, $[3\pi; 4\pi]$, ...
c) 1) Die Tangensfunktion ist in keinem Bereich streng monoton fallend.
2) ..., $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, ...

5.30 Es werden grafische Darstellungen analog zu Buch, Seite 135, verlangt.

5.31

	arcsin(x)	arccos(x)	arctan(x)
Nullstellen	(0|0)	(1|0)	(0|0)
Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton fallend	streng monoton steigend
Symmetrie	ungerade	nicht symmetrisch	ungerade

5.32 ***a)*** 90°, $\frac{\pi}{2}$, weil $\sin(90°) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
b) 210°, $\frac{7\pi}{6}$ bzw. 330°, $\frac{11\pi}{6}$, weil $\sin(210°) = \sin(330°) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -0{,}5$.
c) 45°, $\frac{\pi}{4}$ bzw. 135°, $\frac{3\pi}{4}$, weil $\sin(45°) = \sin(135°) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.33 ***a)*** 90°, $\frac{\pi}{2}$ bzw. 270°, $\frac{3\pi}{2}$, weil $\cos(90°) = \cos(270°) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.
b) 60°, $\frac{\pi}{3}$ bzw. 300°, $\frac{5\pi}{3}$, weil $\cos(60°) = \cos(300°) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0{,}5$.
c) 180°, π, weil $\cos(180°) = \cos(\pi) = -1$.

5.34 ***a)*** 0°, 0 rad bzw. 180°, π, weil $\tan(0°) = \tan(180°) = \tan(0) = \tan(\pi) = 0$.
b) 45°, $\frac{\pi}{4}$ bzw. 225°, $\frac{5\pi}{4}$, weil $\tan(45°) = \tan(225°) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$.
c) 60°, $\frac{\pi}{3}$ bzw. 240°, $\frac{4\pi}{3}$, weil $\tan(60°) = \tan(240°) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

5.36 ***a)*** $x_1 = 0{,}411...$, $x_2 = 2{,}730...$, $x_3 = 6{,}694...$
b) $x_1 = -0{,}775...$, $x_2 = 3{,}916...$, $x_3 = 5{,}507...$
c) $x_1 = -0{,}643...$, $x_2 = 0{,}643...$, $x_3 = 5{,}639...$, $x_4 = 6{,}926...$
d) $x_1 = 2{,}094...$, $x_2 = 4{,}188...$
e) $x_1 = -0{,}785...$, $x_2 = 2{,}356...$, $x_3 = 5{,}497...$
f) $x_1 = 1{,}107...$, $x_2 = 4{,}248...$

Erklärung zu ***a)*** und ***b)***: Man zeichnet die Sinuskurve und schneidet sie mit der Geraden $y = 0{,}4$ bzw. $y = -0{,}7$. Die x-Werte der Schnittpunkte sind die Winkel mit dem Sinuswert 0,4 bzw. −0,7. Aufgrund der Periodizität schneidet die Gerade die Sinuskurve jeweils im Abstand 2π von einem Schnittpunkt wieder. Dabei gilt: $x_2 = \pi - x_1$.

Erklärung zu ***c)*** und ***d)***: Man zeichnet die Cosinuskurve und schneidet sie mit der Geraden $y = 0{,}8$ bzw. $y = -0{,}5$. Die x-Werte der Schnittpunkte sind die Winkel mit dem Cosinuswert 0,8 bzw. −0,5. Aufgrund der Periodizität schneidet die Gerade die Cosinuskurve jeweils im Abstand 2π von einem Schnittpunkt wieder. Dabei gilt: $x_2 = -x_1$.

Erklärung zu ***e)*** und ***f)***: Man zeichnet die Tangenskurve und schneidet sie mit der Geraden $y = -1$ bzw. $y = 2$. Die x-Werte der Schnittpunkte sind die Winkel mit dem Tangenswert −1 bzw. 2. Um einen genauen Wert zu erhalten kann der Winkel mithilfe des TR berechnet werden. Aufgrund der Periodizität schneidet die Gerade die Tangenskurve jeweils im Abstand π. Dabei gilt: $x_2 = x_1 + \pi$.

5.37 ***1)*** $x = \frac{a}{\cos(\alpha)}$
2) b ist die Ankathete zum Winkel β, die Hypotenuse ist x $\Rightarrow \frac{b}{x} = \cos(\beta) \Rightarrow b = x \cdot \cos(\beta)$.
x mithilfe von ***1)*** ersetzen ergibt $b = \frac{a}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(\beta)$.
3) x = 50,000... m, b = 19,969... m, Länge der Gegenkathete von α: 30,000... m, Länge der Gegenkathete von β: 45,839... m, u = 135,808... m.
4) 167,70 €

5.39 ***a) 1)*** $\frac{d}{\sin(\beta)} = \frac{e}{\sin(\varepsilon)} = \frac{f}{\sin(\varphi)}$
2) $d^2 = e^2 + f^2 - 2 \cdot e \cdot f \cdot \cos(\delta)$, $e^2 = d^2 + f^2 - 2 \cdot d \cdot f \cdot \cos(\varepsilon)$, $f^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos(\varphi)$
b) 1) $\frac{x}{\sin(\rho)} = \frac{y}{\sin(\omega)} = \frac{z}{\sin(\varphi)}$
2) $x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\rho)$, $y^2 = x^2 + z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot \cos(\omega)$, $z^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos(\varphi)$
c) 1) $\frac{a}{\sin(\beta)} = \frac{b}{\sin(\gamma)} = \frac{c}{\sin(\alpha)}$
2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\beta)$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\gamma)$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$

5.40 $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(90°) = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0 = a^2 + b^2$

5.41 $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(90°)} = \frac{\sin(\alpha)}{1} = \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

5.45 ***a) 1)*** Cosinussatz
2) Es muss zuerst der der längsten Seite gegenüber liegende Winkel berechnet werden.
b) 1) Cosinussatz
2) Wird im zweiten Schritt mit dem Sinussatz mit b, β und a der Winkel α berechnet, so zeigt der TR nicht direkt den richtigen Winkel an.
c) 1) Sinussatz
2) Sind ε und φ gleich groß, ist die ε gegenüber liegende Seite gleich x.
d) 1) Sinussatz ***2)*** β muss ein spitzer Winkel sein.

5.46 ***1)*** Kein Dreieck, da $a + b = 60 \text{ mm} < 65 \text{ mm} = c$.
2) Kein Dreieck, da $\sin(\gamma) = \sin(\beta) \cdot \frac{c}{b} = 1{,}24 > 1$.
3) Ein Dreieck, da zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.
4) Ein Dreieck, da $b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot 1$.
5) Kein Dreieck, da $a + b = 11 \text{ cm} < 14 \text{ cm} = c$.
6) Zwei Dreiecke, da der Winkel gegenüber der kürzeren Seite gegeben ist.

5.47 ***1)*** Falsch. Die dem Winkel ε gegenüber liegende Seite ist m und nicht p.
2) Falsch. Die Seiten m und p schließen den Winkel ω ein und nicht den Winkel ε.
3) Richtig. In einem Dreieck ist das Verhältnis von Seitenlänge zu Sinuswert des gegenüberliegenden Winkels konstant.
4) Richtig. Der Cosinussatz $m^2 = k^2 + p^2 - 2kp \cdot \cos(\varepsilon)$ umgeformt auf $\cos(\varepsilon)$ ergibt die angegebene Formel.
5) Falsch, es sei denn φ ist ein rechter Winkel.
6) Falsch. Der Ausdruck $2km \cdot \cos(\varphi)$ muss ein negatives Vorzeichen haben.

5.48 ***a)***

a	b	c	α	β	γ	A
110 cm	85 cm	104,703... cm	70°	46,562...°	63,437...°	4 181,536... cm²

Sinussatz mit a, b und α zur Berechnung von β; Winkelsumme 180° mit α und β zur Berechnung von γ; Cosinussatz mit a, b und γ zur Berechnung von c; Flächenformel mit a, b und γ zur Berechnung von A.

b)

a	b	c	α	β	γ	A
4,5 cm	6 cm	3,2 cm	47,404°	101,029...°	31,566°	7,067... cm²

Cosinussatz mit a, b und c zur Berechnung von α; Sinussatz mit a, b und α zur Berechnung von β, Winkelsumme 180° mit α und β zur Berechnung von γ; Flächenformel mit a, b und γ zur Berechnung von A.

c)

a	b	c	α	β	γ	A
40 cm	30,942... cm	21,405... cm	98°	50°	32°	327,944... cm²

Winkelsumme 180° mit β und γ zur Berechnung von α; Sinussatz mit a, α und β zur Berechnung von b; Sinussatz mit a, α und γ zur Berechnung von c; Flächenformel mit a, b und γ zur Berechnung von A.

d)

a	b	c	α	β	γ	A
5,264… cm	8 cm	5,001… cm	40°	102,358…°	37,641…°	1 286 cm²

Flächenformel mit b, α und A zur Berechnung von c; Cosinussatz mit b, c und α zur Berechnung von a; Sinussatz mit a, b, α zur Berechnung von β. Winkelsumme 180° mit α und β zur Berechnung von γ.

e)

a	b	c	α	β	γ	A
109,196… cm 26,750… cm	52 cm	75 cm	117,443…° 12,556…°	25°	37,556…° 142,443…°	1 730,560… cm² 423,939… cm²

Sinussatz mit b, c und β zur Berechnung von γ_1; Berechnung des Supplementärwinkels γ_2; Winkelsumme 180° mit β und γ_1 bzw. γ_2 zur Berechnung von α_1 bzw. α_2; Sinussatz mit b, α_1 bzw. α_2 und β zur Berechnung von a_1 bzw. a_2; Flächenformel mit a_1 bzw. a_2, c und β zur Berechnung von A_1 bzw. A_2.

f)

a	b	c	α	β	γ	A
21,845… cm 64,099… cm	23 cm	42 cm	19,975…° 160,024…°	21,079…° 7,040…°	138,944…° 12,934…°	1,65 dm²

Flächenformel mit b, c und A zur Berechnung von α_1 bzw. α_2; Cosinussatz mit b, c und α_1 bzw. α_2 zur Berechnung von a_1 bzw. a_2; Flächenformel mit a_1 bzw. a_2, c und A zur Berechnung von γ_1 bzw. γ_2; Winkelsumme 180° mit α_1 bzw. α_2 und γ_1 bzw. γ_2 zur Berechnung von β_1 bzw. β_2.

5.49 ***a)*** $p = 73{,}874\ldots$ m, $\delta = 36{,}994\ldots°$, $\omega = 92{,}005\ldots°$
b) $x_1 = 1{,}868\ldots$ dm, $x_2 = 2{,}437\ldots$ dm, $\varepsilon_3 = 95{,}5°$

5.50 ΔABC:
$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\beta)$
$\cos(\beta) = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} = -0{,}671\ldots$
$\beta = 132{,}177\ldots°$
$\alpha = 180° - \beta = 47{,}822\ldots°$

Der Winkel β wird von den Seiten a und b eingeschlossen und kann daher mithilfe des Cosinussatzes berechnet werden.

$A = 2 \cdot \frac{a \cdot b \cdot \sin(\beta)}{2} = a \cdot b \cdot \sin(\beta)$
$A = 25{,}937\ldots\ \text{cm}^2$

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

ΔABD: $f^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$
$f = 5{,}196\ldots$ cm

f wird mithilfe des Cosinussatzes ermittelt.

ΔABM: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(\varphi)$
$\varphi = 114{,}827\ldots°$

Die Diagonalen e und f halbieren einander, somit kann der Winkel φ im Dreieck ABM berechnet werden.

5.51

	a	b	α	β
a)	164,027… mm	127,847… mm	110,007…°	69,992…°
b)	1,006… dm	2,689… dm	68,383…°	111,616…°

5.52

	a	b	e	f	α	β	A
a)	32 mm	57 mm	46,324… mm	80 mm	54,333…°	125,666…°	1 481,871…mm²
b)	63,999… mm	145 mm	175,659… mm	139,232… mm	72°	108°	8 825,8 mm²
c)	276 mm	53,619… mm 255,054… mm	250 mm	309,196… mm 468,996… mm	124°	56°	122,690… cm² 583,601… cm²
d)	51,264… mm	90 mm	84 mm	120 mm	113,449…°	66,550…°	4 232,718… mm²

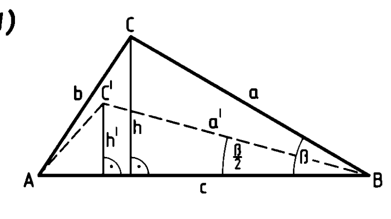
5.54 Längen in Millimeter

	a	b	c	d	e	f	α	β	h	A
a)	110	59,765...	41	36,585...	67,241...	97	59,958...°	32°	31,670...	2 391,151... mm²
b)	49	22	14,793...	25,458...	38	33,732...	40°	48,058...°	16,364...	521,969... mm²
c)	56,516... 34,100...	24	15	37	50,032...	33,722... 21,558...	35°	62,161...° 117,838...°	21,222...	758,871... mm² 521,017... mm²
d)	145	61,659...	78	39,022...	100,893...	133,286...	65°	35°	35,366...	3 943,349... mm²

5.55 ***a)*** 685,631... N; 22,477...° ***b)*** 948,674... N; 55,573...° ***c)*** 1 127,679... N; 19,470...° ***d)*** 22,183... kN; 79,952...°

5.56 ***a)*** 1 755,101... N; 1 211,474... N ***b)*** 5,574... kN; 4,991... kN

5.57 ***1)***



Der Flächeninhalt $A = \frac{c \cdot h}{2}$ mit $h = a \cdot \sin(\beta)$ wird bei Halbierung des Winkels β nicht halbiert, da das Halbieren des Winkels nicht zu einer Halbierung der Höhe führt.
$h = 2\text{ dm} \cdot \sin(30°) = 1\text{ dm}$, $h' = 2\text{ dm} \cdot \sin(15°) = 0{,}517...\text{ dm}$, $h' \neq \frac{h}{2}$. Bei β = 30° beträgt der Flächeninhalt
$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{2\text{ dm} \cdot 2{,}4\text{ dm} \cdot \sin(30°)}{2} = 1{,}2\text{ dm}^2$, bei β = 15° beträgt er $A' = \frac{2\text{ dm} \cdot 2{,}4\text{ dm} \cdot \sin(15°)}{2} = 0{,}621...\text{ dm}^2$.

2) 150°

5.58 ***1)*** 6,382... m ***2)*** $h = a \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)}$ ***3)*** $\beta = 2\alpha \Rightarrow h = a \cdot \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(2\alpha)}{\sin(2\alpha - \alpha)} \Rightarrow h = a \cdot \sin(2\alpha)$

5.59 ***1)*** 1. Schritt: Berechnung der Höhe des Hochhauses gemessen von der Augenhöhe Majas (a) und der horizontalen Entfernung Majas vom Hochhaus (b) durch Lösen des Gleichungssystems
I: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$
II: $\tan(\beta) = \frac{a + h}{b}$
2. Schritt: Die Höhe des Hochhauses ergibt sich durch a + 1,65 m.
a) 38,785... m; 19,331... m ***b)*** 106,688... m; 93,585... m

2) Je näher Maja dem Hochhaus kommt, desto größer werden die beiden Höhenwinkel. Je weiter sich Maja entfernt, desto kleiner werden sie.

5.60 114,587... m

5.61 4,359... m

5.62 Die Funkgeräte haben mit 100 m eine ausreichende Reichweite. Die Häuser sind nur 26,138... m voneinander entfernt.

5.63 Die Strecke QS liegt sowohl im Dreieck PQS als auch im Dreieck QRS. Deshalb lässt sich mit dem Sinussatz (Gleichung I und II) und der Winkelsumme für allgemeine Vierecke (Gleichung III) folgendes Gleichungssystem aufstellen:

I: $\frac{\overline{PQ}}{\sin(\alpha)} = \frac{\overline{QS}}{\sin(\delta)} \Rightarrow \overline{QS} = \frac{\overline{PQ} \cdot \sin(\delta)}{\sin(\alpha)}$ mit $\delta = \sphericalangle QPS$

II: $\frac{\overline{QR}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{QS}}{\sin(\varphi)} \Rightarrow \overline{QS} = \frac{\overline{QR} \cdot \sin(\varphi)}{\sin(\beta)}$ mit $\varphi = \sphericalangle QRS$

III: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varphi = 360° \Rightarrow \varphi = 102{,}9° - \delta$

Lösen des Gleichungssystems mithilfe TE ergibt:
$\overline{QS} = 72{,}416...$ km, $\delta = 59{,}789...°$, $\varphi = 43{,}110...°$

Berechnen der Entfernung des Schiffs von den Stationen P bzw. R mithilfe des Cosinussatzes:

$\overline{PS} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QS}^2 - 2 \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{QS} \cdot \cos(180° - \alpha - \delta)} = 81{,}451...$ km

$\overline{RS} = \sqrt{\overline{QR}^2 + \overline{QS}^2 - 2 \cdot \overline{QR} \cdot \overline{QS} \cdot \cos(180° - \beta - \varphi)} = 105{,}730...$ km

5.64 ***1)*** Die Skizze ***A)*** beschreibt die Situation. In Skizze ***B)*** sind die Tiefenwinkel falsch eingezeichnet. Ein Tiefenwinkel muss einen horizontalen und einen schräg nach unten laufenden Schenkel haben. Außerdem muss φ laut Angabe ein Horizontalwinkel sein. In Skizze ***B)*** liegt φ in der durch das Dreieck APQ festgelegten schiefen Ebene.

2) 4 706,222... m

5.65

	ε	ω	φ
a)	83,552...°	129,955...°	146,492...°
b)	86,127...°	134,416...°	139,456...°

5.66 ***a) 1)*** −45,088...° ***2)*** 625,339... $\frac{km}{h}$ ***b) 1)*** −36,368...° ***2)*** 866,007... $\frac{km}{h}$

5.67 ***a) 1)*** 77,828...° ***2)*** 16,178... $\frac{km}{h}$ ***3)*** 808,930... m

b) 1) 81,975...° ***2)*** 2,107... $\frac{m}{s}$ ***3)*** 505,803... m

5.68 Nein, es besteht kein linearer Zusammenhang. Wenn der kleinere Winkel fast 45° beträgt, dann hätte der größere fast 90° und damit wäre dieser Gegenstand um vieles größer.

5.69 ***1)*** Die Behauptung ist falsch. $\sin(60°) < 2 \cdot \sin(30°)$

2) Die Behauptung ist falsch. $\cos(30°) > \frac{\cos(120°)}{4}$

5.70 ***a)*** 0,953... ***b)*** 0,994... ***c)*** −4,898...

5.71 ***a)*** $\cos(165°) = \cos(45° + 120°) = \cos(45°) \cdot \cos(120°) - \sin(45°) \cdot \sin(120°) =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = -0{,}965...$

b) $\sin(75°) = \sin(30° + 45°) = \sin(30°) \cdot \cos(45°) + \cos(30°) \cdot \sin(45°) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 0{,}965...$

c) $\tan(105°) = \tan(45° + 60°) = \frac{\tan(45°) + \tan(60°)}{1 - \tan(45°) \cdot \tan(60°)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} = -3{,}732...$

d) $\sin(240°) = \sin(2 \cdot 120°) = 2 \cdot \sin(120°) \cdot \cos(120°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}866...$

e) $\cos(300°) = \cos(2 \cdot 150°) = \cos^2(150°) - \sin^2(150°) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

5.73 ***a)*** $\cos(\alpha)$ ***b)*** $-\cos(\alpha)$ ***c)*** $-\cos(\alpha)$ ***d)*** $-\sin(\alpha)$ ***e)*** $-\tan(\alpha)$ ***f)*** $\frac{1 + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)}$

5.74 ***a)*** $-\sin(x)$ ***b)*** $\sin(x)$ ***c)*** $-\cos(x)$ ***d)*** $\sin(x)$ ***e)*** $\frac{\tan(x)-1}{\tan(x)+1}$ ***f)*** $\tan(x)$

5.75 ***a)*** $\frac{1}{\cos(\alpha)}$ ***b)*** $\sin(\alpha)$ ***c)*** $\cos(\alpha)$

5.76 ***a)*** 1 ***b)*** $\tan(\alpha)$ ***c)*** $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

5.77 ***a)*** $\frac{1}{\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}$ ***b)*** $\sin(2\alpha)+1$ ***c)*** 1 ***d)*** $\tan(\alpha)$ ***e)*** $2\cdot\cos^2(\alpha)$ ***f)*** $2\cdot\cos(\alpha)$

5.78 ***a)*** $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ***b)*** $\sin(\alpha)$ ***c)*** $-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=-\frac{1}{\tan(\alpha)}$

5.80 ***a)*** $\sin(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\left(\sin(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$
$=2\cdot\cos(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\cos(x)\cdot 0{,}5=\cos(x)$

b) $\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left(\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=$
$=2\cdot\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\cos(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cdot\cos(x)$

5.81 ***a)*** $\sqrt{2}\cdot(\cos(45°)\cdot\cos(\alpha)+\sin(45°)\cdot\sin(\alpha))=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\alpha)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\alpha)\right)=$
$=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos(\alpha)+\sin(\alpha))=\cos(\alpha)+\sin(\alpha)$

b) $-\sqrt{2}\cdot(\sin(45°)\cdot\cos(\alpha)-\cos(45°)\cdot\sin(\alpha))=-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(\alpha)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\alpha)\right)=$
$=-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos(\alpha)-\sin(\alpha))=\sin(\alpha)-\cos(\alpha)$

5.82 ***a)*** $\sin(90°-\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\sin^2(\alpha)}\right)$ ***b)*** $\frac{\cos^3(\alpha)}{1-\cos^2(\alpha)}$

5.83 ***1)*** $82{,}819...°$ ***2)*** $n\in[-2;2]$

5.84 $\varepsilon=\arctan\left(\frac{Hd}{a^2-Ha+d^2}\right)$

5.85 ***1)*** $h_2:h_1=1:\frac{1-\tan^2(\alpha)}{2}$ ***2)*** $30°$

5.86 ***a)*** $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-\sin^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)$ ergibt die Gleichung
$\cos(2\alpha)=1-2\cdot\sin^2(\alpha)\ \Rightarrow\ 2\cdot\sin^2(\alpha)=1-\cos(2\alpha)\ \Rightarrow\ \sin^2(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2\alpha))$

b) $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-(1-\cos^2(\alpha))=-1+2\cdot\cos^2(\alpha)$ ergibt die Gleichung
$\cos(2\alpha)=-1+2\cdot\cos^2(\alpha)\ \Rightarrow\ 2\cdot\cos^2(\alpha)=1+\cos(2\alpha)\ \Rightarrow\ \cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\alpha))$

c) $1+\tan^2(\alpha)=1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

5.87 ***a)*** Mit der Beschriftung in Abbildung 5.4, Seite 148 gilt:
$\sin(\alpha+\beta)=\overline{SU}+\overline{PS}=\overline{RT}+\overline{PS}$
ΔORP: $\overline{OR}=\cos(\beta)$; $\overline{PR}=\sin(\beta)$
ΔOTR: $\overline{RT}=\sin(\alpha)\cdot\overline{OR}=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)$
ΔSRP: $\overline{PS}=\cos(\alpha)\cdot\overline{PR}=\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\Rightarrow\ \sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

b) $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(-\beta)=$
$=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot(-\sin(\beta))=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

c) $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)=$
$=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

d) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}=\frac{\frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}}{\frac{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}}=$

$=\frac{\tan(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)}{\cos(\beta)-\tan(\alpha)\cdot\sin(\beta)}=\frac{\frac{\tan(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\beta)-\tan(\alpha)\cdot\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

5.88 – 5.100

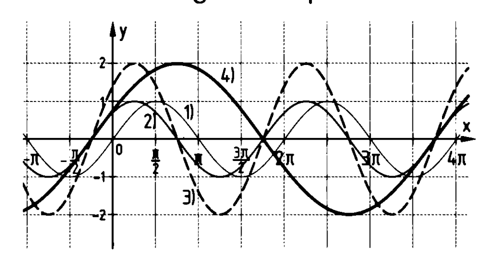
5.88 ***a)*** $\sin(2\varphi) = \sin(\varphi + \varphi) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$
b) $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi + \varphi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$

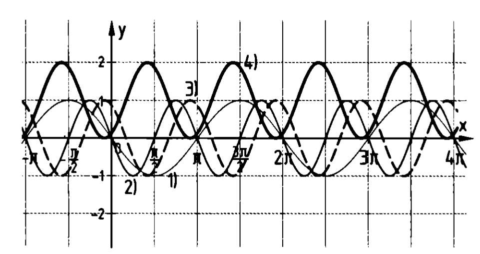
5.89 Addition der Gleichungen $\alpha = \alpha' + \beta'$ und $\beta = \alpha' - \beta'$ ergibt $\alpha' = \frac{\alpha + \beta}{2}$,
Subtraktion $\beta' = \frac{\alpha - \beta}{2}$.
a) Einsetzen in $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$ ergibt $\sin(\alpha' + \beta') + \sin(\alpha' - \beta')$. Anwenden des 1. Summensatzes ergibt $2 \cdot \sin(\alpha') \cdot \cos(\beta')$ und nach Einsetzen obiger Beziehungen $2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.
b) Einsetzen in $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ ergibt $\cos(\alpha' + \beta') + \cos(\alpha' - \beta')$. Anwenden des 1. Summensatzes ergibt $2 \cdot \cos(\alpha') \cdot \cos(\beta')$ und nach Einsetzen obiger Beziehungen $2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$.
c) Analog ***a)***
d) Analog ***b)***

5.90 ***1)*** Die Amplitude ist doppelt so groß.
2) Die Periode ist ein Drittel.
3) Der Graph ist um eine Einheit nach links verschoben.

5.93 ***a)*** ***2)*** Der Graph ist, verglichen mit sin(x), um $\frac{\pi}{4}$ Einheiten nach links verschoben.
3) Der Graph hat, verglichen mit ***2)***, doppelt so große Funktionswerte.
4) Der Graph hat, verglichen mit ***3)***, eine halb so große Frequenz.

b) ***2)*** hat, verglichen mit ***1)***, doppelte Frequenz.
3) ist, verglichen mit ***2)***, um $\frac{\pi}{3}$ Einheiten nach rechts verschoben.
4) ist, verglichen mit ***3)***, an der x-Achse gespiegelt und um eine Einheit nach oben verschoben.





5.96 ***a)*** [−3; 3] ***b)*** [−2; 2] ***c)*** [1,5; 2,5] ***d)*** [0; 2]

5.97 ***a)*** $\frac{2\pi}{3}$ ***b)*** 12π ***c)*** $\frac{\pi}{2}$ s ***d)*** 8π s

5.98 ***a)*** Durch Multiplikation des Funktionsterms mit einem Faktor $a > 1$ werden die Funktionswerte um den Faktor a vergrößert. Daraus ergibt sich die Funktionsgleichung $y = 4 \cdot \sin(x)$.
b) Durch Multiplikation des Funktionsterms mit einem Faktor $0 < a < 1$ werden die Funktionswerte um den Faktor a verkleinert. Daraus ergibt sich die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{10} \cdot \sin(x)$.
c) Durch Multiplikation des Funktionsterms mit dem Faktor 2 werden die Funktionswerte verdoppelt. Die Multiplikation mit (−1) bewirkt einen Vorzeichenwechsel bei den Funktionswerten. Daraus ergibt sich die Funktionsgleichung $y = -2 \cdot \sin(x)$.

5.99 ***a)*** $y = \sin(x - 2)$ ***b)*** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ***c)*** $y = 2 \cdot \sin(x + 1)$ ***d)*** $y = \frac{1}{4} \cdot \sin(x - \pi)$ ***e)*** $y = -\sin(x) - 1$

5.100 ***a)*** $y = 2 \cdot \sin(2x)$
b) $y = 150\,\Omega \cdot \sin(144\pi\,s^{-1} \cdot t)$
c) $y = 4 \cdot \sin(6x)$
d) $y = 12{,}5\text{ cm} \cdot \sin(5\pi\,s^{-1} \cdot t)$
e) $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
f) $y = 0{,}2\text{ mA} \cdot \sin(200\pi\,s^{-1} \cdot t)$

5.101 ***1)*** Falsch. $y = 4 \cdot \sin(x)$ hat die maximale Amplitude 4 und die Periodenlänge 2π.

2) Falsch. $y = \sin(2x - 1) = \sin\left(2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ hat bei $x_0 = \frac{1}{2}$ und bei $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$ Nullstellen.

3) Richtig. Bei beiden Funktionen wird das Argument x mit dem Faktor 1 multipliziert.

4) Falsch. Der Wertebereich für $y = \sin(2x)$ ist $W = [-1; 1]$, für $y = 2 \cdot \sin(x)$ ist er $W = [-2; 2]$.

5) Richtig. Die Addition von $\frac{\pi}{4}$ bewirkt eine Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{4}$ Einheiten nach links. Anstelle der Verschiebung des Graphen nach links kann auch das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ Einheiten nach rechts verschoben werden.

5.102 ***a)*** $y = 3 \cdot \sin(x)$ Die Funktion hat die dreifache Amplitude.

b) $y = -2 \cdot \sin(x)$ Die Funktion hat die doppelte Amplitude und die Funktionswerte haben das gegenteilige Vorzeichen.

5.103 ***a)*** $y = 10 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ Die Funktion hat die zehnfache Amplitude und der Graph ist um $\frac{\pi}{2}$ Einheiten nach rechts verschoben.

b) $y = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ Die Funktion hat die halbe Amplitude und der Graph ist um $\frac{\pi}{2}$ Einheiten nach rechts verschoben.

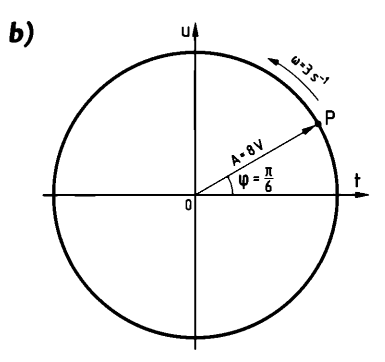
5.104 ***a)*** $y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ Die Funktion hat die doppelte Amplitude und die doppelte Periode.

b) $y = -\sin(\pi x)$ Die Funktionswerte haben das gegenteilige Vorzeichen und die Funktion hat die $\frac{1}{\pi}$-fache Periode.

5.105 ***a)*** $y = 4 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ***b)*** $y = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ ***c)*** $y = 3 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

5.106 ***a)***

b)



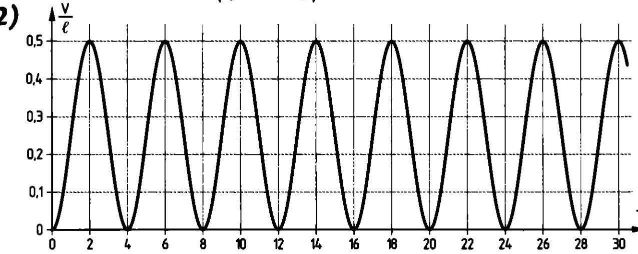
5.107 ***a)*** $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ ***b)*** $y = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{4}{3}x - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}$

5.108 ***a)*** $y(t) = 1{,}5\text{ cm} \cdot \sin(s^{-1} \cdot t + 0{,}5)$ ***b)*** $u(t) = 2\text{ V} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t - 1)$

5.109 Es ist die Darstellung der folgenden Funktionen mittels Technologieeinsatz verlangt: $y(t) = 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (rot); $y(t) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (grün); $y(t) = 0{,}5 \cdot \sin(2x)$ (blau)

5.110 ***1)*** $V(t) = 0{,}25\,\ell \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}25\,\ell$

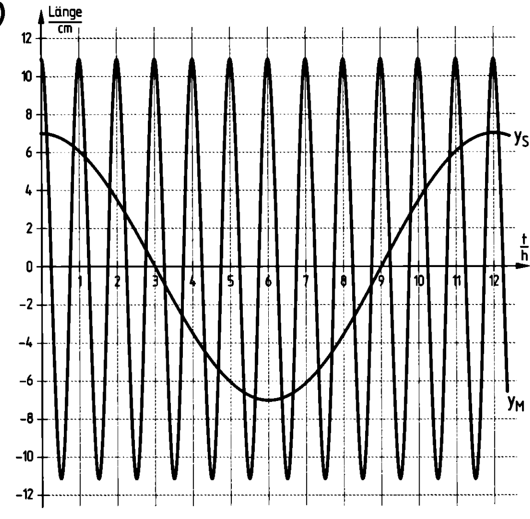
2)



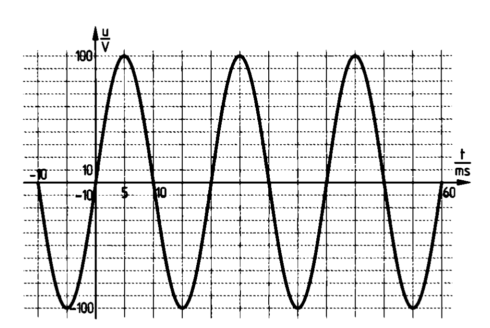
3) a) und ***b)*** Die Amplitude, das ist das Luftvolumen je Atemzug, und die Frequenz, das sind die Atemzüge pro Minute, verändern sich.

5.111 ***1)*** Stundenzeiger:
$y_S = 7\text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6\text{ h}} \cdot t\right)$
Minutenzeiger:
$y_M = 11\text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\text{h}} \cdot t\right)$

2)

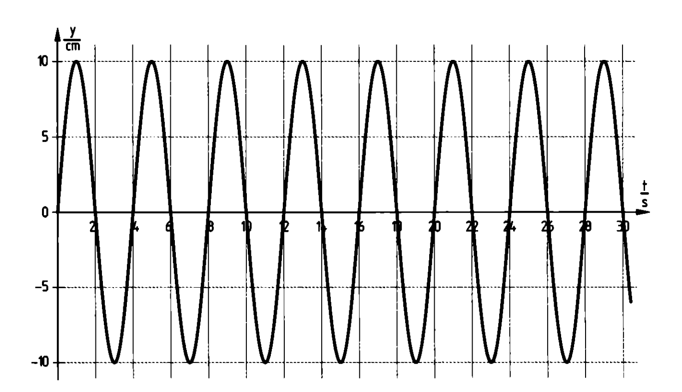


5.112 ***1)*** $T = 0{,}02\text{ s}$, $\omega = 100\pi\text{ s}^{-1}$
2) $u(t) = 100\text{ V} \cdot \sin(100\pi\text{ s}^{-1} \cdot t)$
3) 30,901... V, 100 V und 0 V



5.113 ***1)*** Das Netzgerät kann bei einer Eingangswechselspannung von 100 Volt bis 240 Volt betrieben werden. Die maximale Stromaufnahme darf 1,5 Ampere betragen. Die Eingangsfrequenz muss zwischen 50 Hertz und 60 Hertz liegen.
2) $u(t) = \hat{u} \cdot \sin\left(2\pi \cdot f\,\frac{1}{s} \cdot t\right)$, $i(t) = 1{,}5\text{ A} \cdot \sin\left(2\pi \cdot f\,\frac{1}{s} \cdot t\right)$
Hinweis: Stelle die Graphen so dar, dass mit Schiebereglern zB die Amplitude der Spannung û der darzustellenden Sinusfunktion zwischen 100 Volt und 240 Volt variiert werden kann, analog für die Frequenz f.
3) Da das Gerät bei einer Netzspannung von 120 Volt und bei einer Netzfrequenz von 60 Hertz betrieben werden kann, funktioniert es auch in den USA.

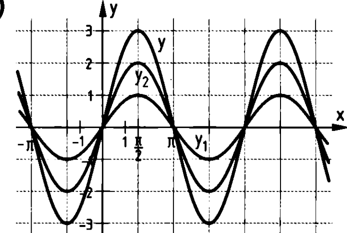
5.114 $y = 10\text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{s} \cdot t\right)$



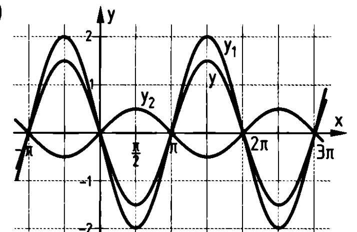
5.115 ***1)*** Die Amplitude der Summenfunktion ist die Summe der Amplituden der einzelnen Funktionen.
2) Die Periode der Summenfunktion ist gleich wie die Periode der beiden Funktionen.



5.117 ***a)***

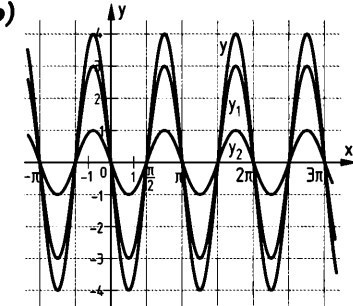


c)

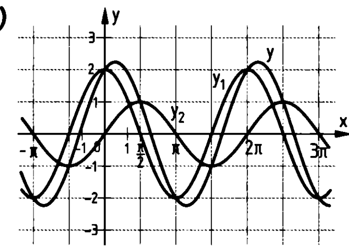




b)



d)



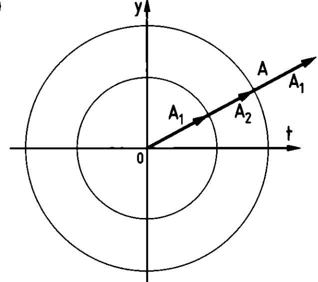
5.118 ***a)*** $y = 2{,}909\ldots\ \text{cm} \cdot \sin\left(\frac{t}{s} + 0{,}350\ldots\right)$

b) $y = 3{,}162\ldots\ \text{cm} \cdot \sin\left(\frac{t}{s} + 0{,}321\ldots\right)$

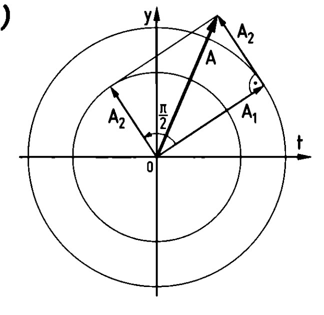
c) $y = 4{,}358\ldots\ \text{V} \cdot \sin\left(2\,\frac{1}{s} \cdot t + 1{,}455\ldots\right)$

d) $y = 1{,}322\ldots\ \text{V} \cdot \sin\left(3\,\frac{1}{s} \cdot t - 1{,}760\ldots\right)$

5.119 ***a)***



b)



5.120 ***1)*** 11:12 Uhr ***2)*** 48mal; 7,034... min ≈ 7 min vor und nach jeder vollen Stunde

5.125 ***a)*** {8,728...°; 81,271...°; 188,728...°; 261,271...°}
b) {15,190...°; 104,809...°; 135,190...°; 224,809...°; 255,190...°; 344,809...°}
c) {29,621...°; 101,621...°; 173,621...°; 245,621...°; 317,621...°}
d) {144,579...°; 215,420...°}

5.126 ***a)*** {55,522...°; 264,477...°}
b) {101,386...°; 118,613...°; 221,386...°; 238,613...°; 341,386...°; 358,613...°}
c) {16,230...°; 76,230...°; 136,230...°; 196,230...°; 256,230...°; 316,230...°}

5.127 ***a)*** { } ***b)*** {1,516...} ***c)*** {0,590...; 1,503...; 2,685...; 3,598...; 4,779...; 5,692...} ***d)*** {1,414...}

5.128 ***a)*** {0,923...; 1,503...; 2,494...; 3,074...; 4,065...; 4,644...; 5,636...; 6,215...}
b) {2,237...; 5,379...} ***c)*** {0,115...; 0,645...; 2,209...; 2,740...; 4,304...; 4,834...}

5.129 ***a)*** $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ ***b)*** {0} ***c)*** {0,982...}

5.130 ***a)*** {0,396...; 1,443...; 2,491...; 3,538...; 4,585...; 5,632...} ***b)*** {0,927...} ***c)*** {0,869...; 2,272...; 4,010...; 5,414...}

5.131 $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$ ***b)*** $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$ ***c)*** $\left\{\frac{2\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}\right\}$

5.132 ***a)*** $y_1 = 3 \cdot \sin(2x)$, $y_2 = 2 \cdot \cos^2(x)$
(0,321...|1,8), (1,570...|0), (3,463...|1,8), (4,712|0), (6,604...|1,8), (7,853...|0), (9,746...|1,8), (10,995...|0)
b) $y_1 = \sin(x)$, $y_2 = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$
$\left(\frac{\pi}{3}\middle|\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{4\pi}{3}\middle|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{3}\middle|\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{10\pi}{3}\middle|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5.134 ***a)*** {0,918...; 2,793...; 4,060...; 5,935...}
b) {3,613...}
c) {0,396...; 1,443...; 2,491...; 3,538...; 4,585...; 5,632...}
d) {0,750...; 3,892...}
e) {0; 2,094...; 4,188...}
f) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

5.135 ***1)*** Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.
a) 2) + ***3)*** 1,25 cm ≈ 0,422... · 3 cm
b) 2) – ***3)*** 4,3 cm ≈ |–1,428...| · 3 cm
c) 2) – ***3)*** 2,8 cm ≈ |–0,939...| · 3 cm
d) 2) – ***3)*** 1,75 cm ≈ |–0,577...| · 3 cm
e) 2) – ***3)*** 2,1 cm ≈ |–0,707...| · 3 cm
f) 2) + ***3)*** 1,5 cm = 0,5 · 3 cm

5.136 ***a)*** 72,542...°; 287,457...°
b) 233,130...°; 306,869...°
c) 72,645...°; 252,645...°
d) 13,297...°; 166,702...°

5.137 ***a)*** 1,789...; 4,931...
b) 2,252...; 4,030...
c) 0,411...; 2,730...
d) 1,255...; 5,027...

5.138 ***a)*** $s_1 = \sqrt{s_2^{\,2} + s_3^{\,2} - 2s_2s_3 \cdot \cos(\omega)}$
b) s_2 mit $s_2 = \sin(\varepsilon) \cdot \frac{s_1}{\sin(\omega)}$
c) $A = \frac{1}{2}s_1s_2 \cdot \sin(\varphi)$
d) $\sin(\varepsilon) = s_2 \cdot \frac{\sin(\omega)}{s_1} = s_2 \cdot \frac{\sin(\varphi)}{s_3}$

5.139 $c = 121{,}028...$ mm; $\alpha = 41{,}296...°$; $\beta = 68{,}703...°$; $A = 4\,792{,}432...\ \text{mm}^2$

5.140 $\gamma = 94°$; $a = 530{,}584...$ cm; $c = 638{,}440...$ cm; $h_b = 529{,}291...$ cm

5.141 $a_1 = 5{,}202...$ dm, $\alpha_1 = 79{,}581...°$, $\beta_1 = 60{,}418...°$; $a_2 = 1{,}845...$ dm, $\alpha_2 = 20{,}418...°$, $\beta_2 = 119{,}581...°$

5.142 $\alpha = 52{,}947...°$; $\beta_1 = 20{,}328...°$; $\gamma = 106{,}723...°$; $A = 15{,}059...\ \text{cm}^2$

5.143 $e = 69{,}955...$ cm; $f = 53{,}161...$ cm; $h_a = 32{,}514...$ cm; $h_b = 49{,}727...$ cm; $A = 1\,690{,}746...\ \text{cm}^2$

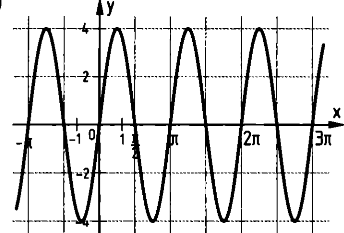
5.144 ***1)*** sin(x), tan(x) ***2)*** cos(x) ***3)*** cos(x) ***4)*** sin(x) ***5)*** sin(x), cos(x) ***6)*** tan(x)

5.145 ***A) → 4); B) → 1); C) → 3)***

5.146 ***a)*** $y = 1{,}5 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ***b)*** $y = 12 \cdot \sin(\pi x)$

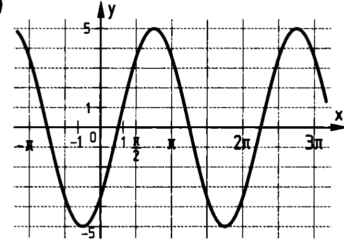
5.147 ***a)*** $y = \frac{5}{2} \cdot \sin\left(\frac{5}{4}\pi x - \frac{5}{4}\pi\right)$ ***b)*** $y = 20 \cdot \sin\left(\frac{x}{5} + 5\right)$

5.148 a)



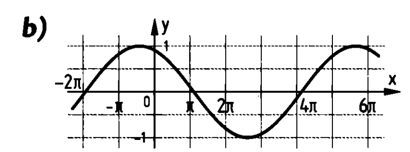
Die Funktionswerte sind vervierfacht und die Periodenlänge ist halbiert.

c)



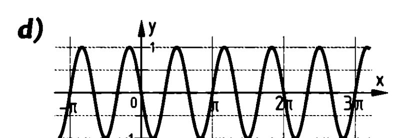
Die Funktionswerte sind verfünffacht und der Graph ist um $\frac{\pi}{4}$ Einheiten nach rechts verschoben.

b)



Die Periodenlänge ist verdreifacht und der Graph ist um 2 Einheiten nach links verschoben.

d)



Die Periodenlänge beträgt nur $\frac{2\pi}{3}$ und der Graph ist um π Einheiten nach links verschoben.

5.149 a) $\cos(180° + \alpha) = \cos(180°) \cdot \cos(\alpha) - \sin(180°) \cdot \sin(\alpha) = -1 \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$

b) $\sin(270° - \alpha) = \sin(270°) \cdot \cos(\alpha) - \cos(270°) \cdot \sin(\alpha) = -1 \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$

5.150 a) $2 \cdot \cos(\alpha)$ **b)** 0

5.151 a) $\frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha + 2\alpha))) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(2\alpha))) =$

$= \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha) \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + \cos(\alpha) \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha))) =$

$= \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin(\alpha) - (\sin(\alpha) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha)) + 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot (1 - \sin^2(\alpha)))) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sin^3(\alpha) = \sin^3(\alpha)$

b) $\frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) - (\cos(\alpha + 2\alpha))) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) - (\cos(\alpha) \cdot \cos(2\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(2\alpha))) =$

$= \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) - (\cos(\alpha) \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) - \sin(\alpha) \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha))) =$

$= \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(\alpha) - (\cos(\alpha) \cdot (1 + 2 \cdot \cos^2(\alpha)) - 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot (1 - \cos^2(\alpha)))) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \cos^3(\alpha) = \cos^3(\alpha)$

5.152 a) $\sin(4\alpha) = 2 \cdot \sin(2\alpha) \cdot \cos(2\alpha) = 2 \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) =$

$= 4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha)) = 4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 8 \cdot \sin^3(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

b) $\cos(4\alpha) = (\cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha)) = 2 \cdot \cos^2(2\alpha) - 1 = 2 \cdot (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))^2 - 1 =$

$= 2 \cdot \cos^4(\alpha) - 4 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin^2(\alpha) + 2 \cdot \sin^4(\alpha) - 1 =$

$= 2 \cdot \cos^4(\alpha) - 4 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) + 2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha))^2 - 1 = 8 \cdot \cos^4(\alpha) - 8 \cdot \cos^2(\alpha) + 1$

Bei ***b)*** ist leider ein Druckfehler aufgetreten. Richtig müsste die Angabe $\cos(4\alpha) = 8 \cdot \cos^4(\alpha) - 8 \cdot \cos^2(\alpha) + 1$ lauten.

5.153 63,434...° bzw. 243,434...°

5.154 a) {7,710...°; 92,289...°; 127,710...°; 212,289...°; 247,710...°; 332,289...°} **b)** { }

5.155 a) {0; 4,068...} **b)** {2,214...; 2,498...}

5.156 a) $\left\{0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$ **b)** {0°; 180°}

5.157 a) $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{19\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}; \frac{23\pi}{6}\right\}$ **b)** $\left\{\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right\}$

5.158 ***a)*** Auf die grafischen Darstellungen zu **a)** wird verzichtet.

1) Maxima: $x_{max} = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z};\ y_{max} = 3$

Minima: $x_{min} = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z};\ y_{min} = -3$

Nullstellen: $x_n = n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

Monotonie: ..., $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$ streng monoton fallend, $\left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[$ streng monoton steigend, $\left]\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right[$ streng monoton fallend, ...

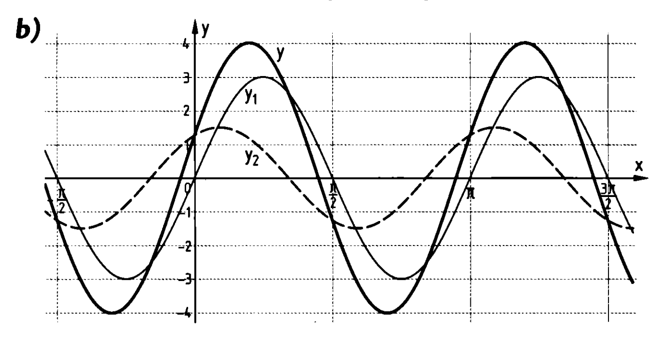
2) Maxima: $x_{max} = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z};\ y_{max} = 1{,}5$

Minima: $x_{min} = \frac{7\pi}{12} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z};\ y_{min} = -1{,}5$

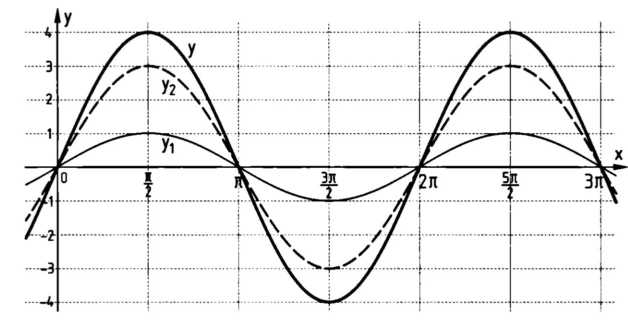
Nullstellen: $x_n = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

Monotonie: ..., $\left]\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}\right[$ streng monoton fallend, $\left]\frac{7\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right[$ streng monoton steigend, $\left]\frac{13\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}\right[$ streng monoton fallend, ...

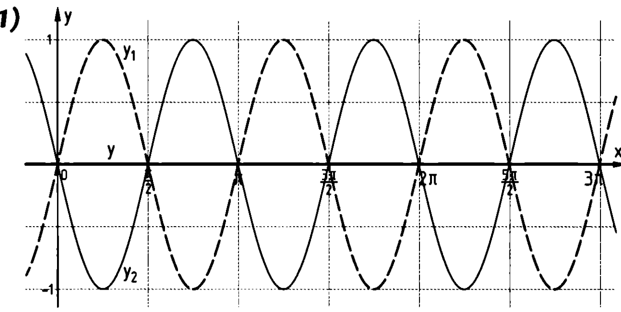
b)



5.159 ***1)*** und ***2)***



5.160 ***1)***



2) $y(t) = 0$

Die Summe der beiden Amplituden ergibt an jeder Stelle den Wert null. Die Überlagerung einer Sinusschwingung mit der gleichen, um π Einheiten verschobenen Schwingung führt zu deren Auslöschung. Verwendung beim Löschen von Störsignalen.

5.161 ***1)*** $y = 0{,}2\ \text{m} \cdot \sin(0{,}4\pi\ \text{s}^{-1} \cdot t - 0{,}02\pi\ \text{m}^{-1} \cdot x)$

2) Beginn nach 1 s, 0,190... m Auslenkung nach 2 s.

3) Ist x konstant, beschreibt die Gleichung die Auslenkung eines Teilchens mit Entfernung x zum Energiezentrum in Abhängigkeit von der Zeit t.
Ist t konstant, beschreibt die Gleichung die Auslenkung eines Teilchens zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit von der Entfernung x.

5.162 $\beta = 96{,}248...°$; $F = 1\,946{,}980...$ N

5.163 1 774,940... m

5.164 ***a)*** 3,760... m ***b)*** 4,515... m ***c)*** Verona

5.165 ***1)*** 1,541... m ***2)*** $b = 0{,}663...$ m; $h_2 = 2{,}964...$ m ***3)*** 709 570,403... ℓ ***4)*** 484,572... m^2

5.166 4,762... m

5.167 ***a) 1)*** 12,706... m ***2)*** 3 909,801... € bzw. 7 072,800... € ***3)*** 9,549... m
b) 1) 25,691... m ***2)*** 9 929,970... € bzw. 20 000,477... € ***3)*** 17,089... m

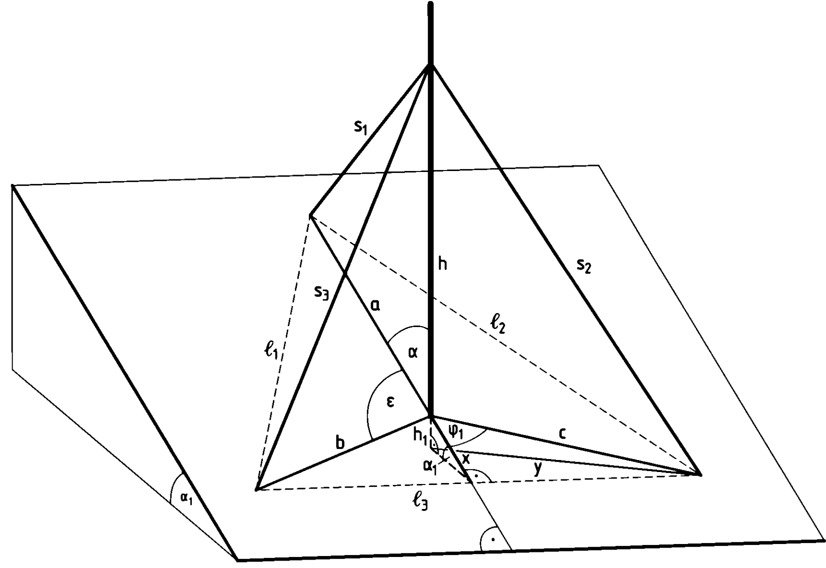
5.168 ***a)*** $s_1 = 1{,}918...$ m; $s_2 = 1{,}494...$ m ***b)*** $F_1 = 79{,}722...$ N; $F_2 = 73{,}867...$ N

5.169 Mindestens 15,853...°, wenn der Tormann den Ball auf die in der Zeichnung angegebene Seite ablenkt.

5.170 ***1) A)*** $y = \sin\left(\frac{2\pi}{23} \cdot t\right)$; ***B)*** $y = \sin\left(\frac{2\pi}{28} \cdot t\right)$; ***C)*** $y = \sin\left(\frac{2\pi}{33} \cdot t\right)$ ***2)*** – ***3)*** Alle 10 626 Tage

5.171 ***1)*** $\ell_1 = 3{,}740...$ m; $\ell_2 = 3{,}804...$ m; $\ell_3 = 3{,}371...$ m

2) $s_1 = 2{,}179...$ m; $s_2 = 2{,}741...$ m; $s_3 = 2{,}615...$ m
Hinweis zur Berechnung von s_2 bzw. s_3: $\varphi_1 = \varepsilon + \varphi - 180°$ berechnen. x mit φ_1 und c berechnen. Die Antenne ist lotrecht. Wegen $\alpha = 60°$ beträgt die Dachneigung daher $\alpha_1 = 30°$. h_1 mit x und α_1 berechnen. y mit h_1 und c berechnen (h_1 ist lotrecht, y ist horizontal). s_2 mit $(h + h_1)$ und y berechnen. Analog für s_3.

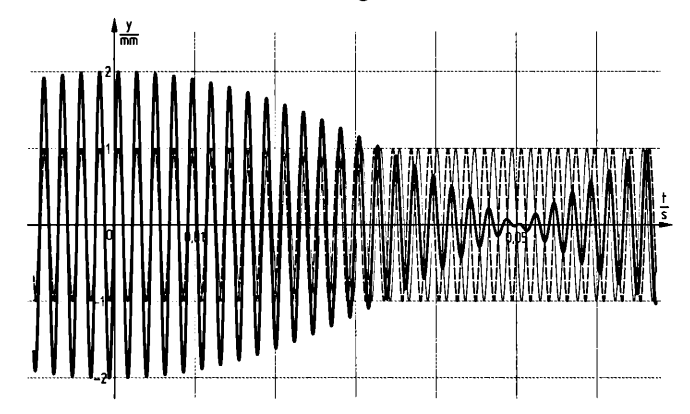


3) 5,688... m^2

5.172 ***1)*** $y_1 = 1\text{ mm} \cdot \sin(880\pi\text{ s}^{-1} \cdot t)$, $y_2 = 1\text{ mm} \cdot \sin(860\pi\text{ s}^{-1} \cdot t)$

2) $y = 1\text{ mm} \cdot (\sin(880\pi\text{ s}^{-1} \cdot t) + \sin(860\pi\text{ s}^{-1} \cdot t))$

Es entsteht eine Schwebung.



3) Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

Kurvendarstellungen



6.1 *1)* 3,605... Einheiten, 33,690...°

2) $P_2(-1{,}5|2{,}598...)$ Der Betrag von x_P ist die Länge der Ankathete bzw. y_P die Länge der Gegenkathete zum Winkel 60° im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenusenlänge 3.
Berechnung von $|x_P|$ mit dem Cosinus bzw. von y_P mit dem Sinus im rechtwinkligen Dreieck:
$\cos(60°) = \frac{|x_P|}{3} \Rightarrow |x_P| = 3 \cdot \cos(60°) = 1{,}5$ bzw. $\sin(60°) = \frac{y_P}{3} \Rightarrow y_P = 3 \cdot \sin(60°) = 2{,}598...$.
Der Punkt P_2 liegt im 2. Quadranten, x_P muss daher ein negatives Vorzeichen haben.

6.4 *a)* $A(-0{,}623...|2{,}934...)$ *c)* $C(2|3{,}464...)$
b) $B(0{,}771...|-0{,}919...)$ *d)* $D(-2{,}993...|-2{,}174...)$

6.5 *a)* A(3,5; 90°) Der Punkt liegt auf der positiven y-Achse. Daher entspricht der Radius r der y-Koordinate von A (r = 3,5) und der Winkel φ ist 90°.

b) B(8; 0°) Der Punkt liegt auf der positiven x-Achse. Daher entspricht der Radius r der x-Koordinate von B (r = 8) und der Winkel φ ist 0°.

c) C(9; 270°) Der Punkt liegt auf der negativen y-Achse. Daher entspricht der Radius r dem Betrag der y-Koordinate von C (r = 9) und der Winkel φ ist 270°.

d) D(4,6; 180°) Der Punkt liegt auf der negativen x-Achse. Daher entspricht der Radius r dem Betrag der x-Koordinate von D (r = 4,6) und der Winkel φ ist 180°.

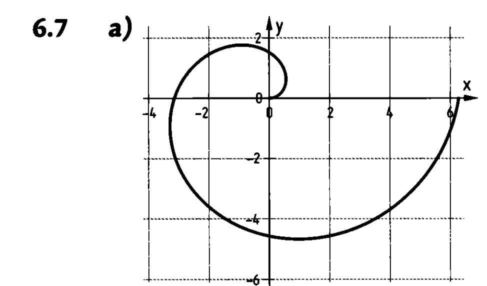
6.6 *a)* A(6,931...; 296,565...°)
Berechnung des Radius r mit der Formel $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{3{,}1^2 + (-6{,}2)^2} = 6{,}931...$
A liegt im 4. Quadranten. Daher gilt für die Berechnung des Winkels φ die Formel
$\varphi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + 360° = \arctan\left(\frac{-6{,}2}{3{,}1}\right) + 360° = 296{,}565...°$

b) B(11,045...; 5,194...°)
Berechnung des Radius r mit der Formel $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{11^2 + 1^2} = 11{,}045...$
B liegt im 1. Quadranten. Daher gilt für die Berechnung des Winkels φ die Formel
$\varphi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) = \arctan\left(\frac{1}{11}\right) = 5{,}194...°$

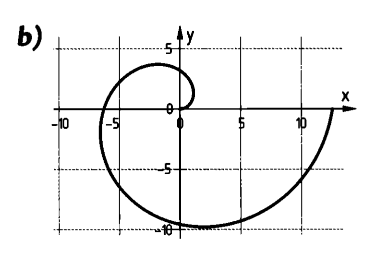
c) C(5,385...; 248,198...°)
Berechnung des Radius r mit der Formel $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = 5{,}385...$
C liegt im 3. Quadranten. Daher gilt für die Berechnung des Winkels φ die Formel
$\varphi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + 180° = \arctan\left(\frac{-5}{-2}\right) + 180° = 248{,}198...°$

d) D(7,854...; 158,334...°)
Berechnung des Radius r mit der Formel $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{(-7{,}3)^2 + (2{,}9)^2} = 7{,}854...$
D liegt im 2. Quadranten. Daher gilt für die Berechnung des Winkels φ die Formel
$\varphi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) + 180° = \arctan\left(\frac{2{,}9}{-7{,}3}\right) + 180° = 158{,}334...°$

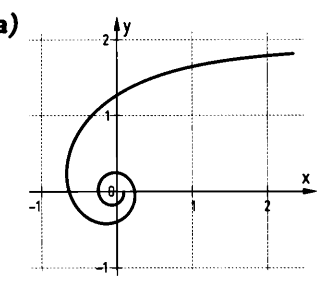
6.7 *a)*



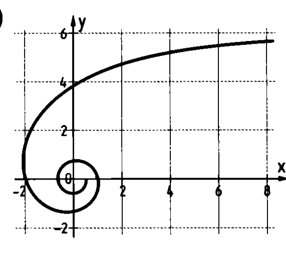
b)



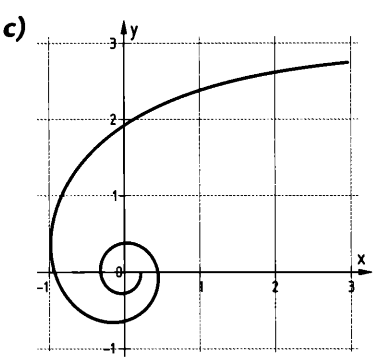
6.8 ***a)***



b)

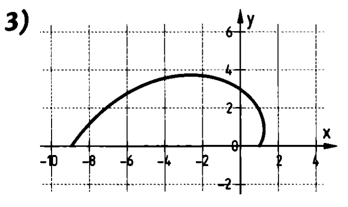


c)



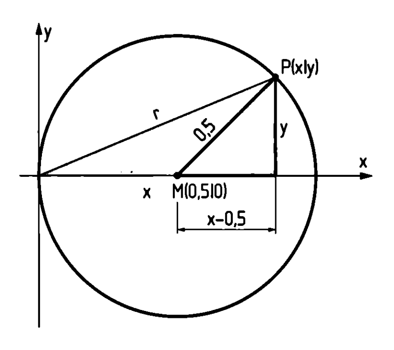
6.9 ***1)*** $(1|0) = (1; 0°)$
2) Ein Kreis mit $r = 1$.

3)



6.10 Die Funktionsgleichungen 1), 2) und 4) beschreiben einen Kreis.

1) Wegen $\cos(0°) = 1$, $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\cos(90°) = 0$ liegen die Punkte $P_1(1|0)$, $P_2(0{,}5|0{,}5)$ und $P_3(0|0)$ auf dem Graph der Funktion. Ist der Graph ein Kreis, muss er daher den Mittelpunkt $M(0{,}5|0)$ und den Radius $r = 0{,}5$ haben. Es muss also gezeigt werden, dass alle Punkte $P(x|y)$ des durch die Funktionsgleichung $r = \cos(\varphi)$ beschriebenen Graphs, vom Punkt $M(0{,}5|0)$ den gleichen Abstand $r = 0{,}5$ haben. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich für den Abstand die Gleichung $(x - 0{,}5)^2 + y^2 = 0{,}5^2$.



Für die Koordinaten eines Punkts P auf dem Graphen gilt:
$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\cos(\varphi)} \Rightarrow y = \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$, $\cos(\varphi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\cos(\varphi)} \Rightarrow x = (\cos(\varphi))^2$
Einsetzen der Koordinaten in die Gleichung für den Abstand ergibt
$((\cos(\varphi))^2 - 0{,}5)^2 + (\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi))^2 = 0{,}5^2$.
Auflösen der Klammern, Addieren von $0{,}5^2$ und Herausheben von $(\cos(\varphi))^2$ ergibt die Gleichung $(\cos(\varphi))^2 \cdot ((\cos(\varphi))^2 - 1 + (\sin(\varphi))^2) = 0$. Wegen $(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = 1$ ist der zweite Faktor auf der linken Seite null und man erhält eine wahre Aussage.

2) Der Abstand r ist für jeden Winkel φ gleich mit $r = 2$. Deshalb beschreibt diese Funktionsgleichung einen Kreis.

3) Der Abstand r entspricht jeweils dem Winkel φ, er wird daher mit größer werdendem Winkel immer größer. Deshalb beschreibt diese Funktionsgleichung keinen Kreis.

4) Begründung analog zu ***1)***.

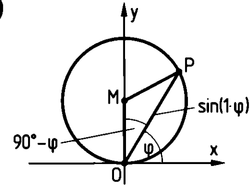
5) Der Abstand r entspricht jeweils dem Quadrat des Winkels φ, er wird daher mit größer werdendem Winkel immer größer. Deshalb beschreibt diese Funktionsgleichung keinen Kreis.

6.11 ***a)*** (25; 0°), (25, 120°), (25, 240°) ***b)*** (40; 18,194...°), (40; 128,682...°), (40; 205,841...°), (40; 295,150...°)

6.13 ***1)*** Ist n ungerade, dann besteht die Rosenkurve aus n Blättern. Ist n gerade, dann besteht die Rosenkurve aus 2n Blättern.

2) $r(\varphi) = \sin(7\varphi)$

3)



$M(0|0{,}5)$, $r = 0{,}5$; da $n = 1$ ungerade ist, besteht die Rosenkurve aus nur einem Blatt. Annahme: Dieses Blatt ist ein Kreis, dann muss wegen $\sin 90° = 1$ der Abstand $\overline{MO} = 0{,}5$ betragen und das Dreieck gleichschenklig sein, also auch $\overline{MP} = 0{,}5$, was zu zeigen ist. Cosinussatz $\Rightarrow$

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{MO}^2 + (\sin(\varphi))^2 - 2 \cdot \overline{MO} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(90° - \varphi)}$$

da: $\cos(90° - \varphi) = \cos(90°) \cdot \cos(\varphi) + \sin(90°) \cdot \sin(\varphi) = \sin(\varphi)$

$$\Rightarrow \sqrt{0{,}5^2 + \sin^2(\varphi) - 2 \cdot 0{,}5 \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi)} =$$
$$= \sqrt{0{,}5^2 + \sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)} = 0{,}5.$$

6.14 ***1)***

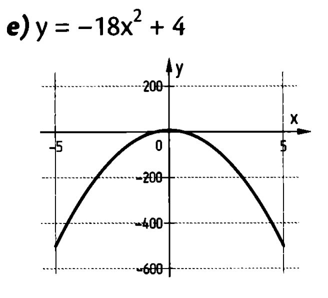
t	0,1 s	0,2 s	0,3 s
$x(t) = 0{,}1\text{ m} + 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$	1,6 m	3,1 m	4,6 m
$y(t) = 0{,}9\text{ m} - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$	0,7 m	0,5 m	0,3 m

2) $y = -\frac{2}{15}x + \frac{137}{150}\text{ m}$

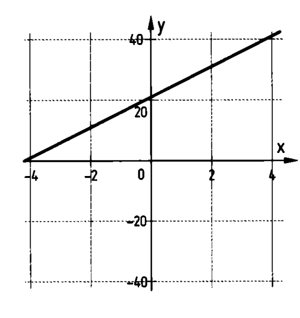
6.18 ***a)*** $y = \frac{x}{2} + 3$

c) $y = \pm\sqrt{4x - 4}$

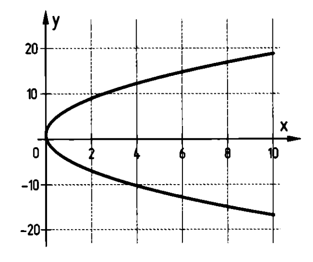
e) $y = -18x^2 + 4$



b) $y = 5x + 21$



d) $y = 1 \pm\sqrt{32x}$



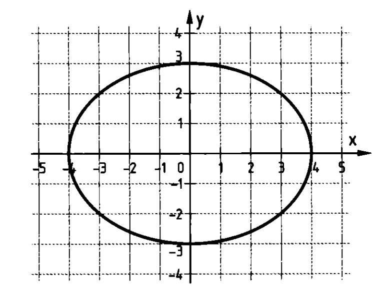
f) $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{4}$

6.19 ***1)*** Es handelt sich um eine Ellipse.

2) Einsetzen in die Formel $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergibt:

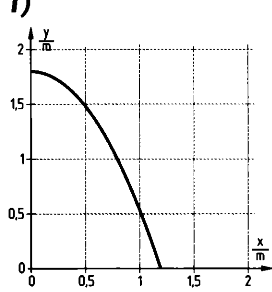
$$\frac{a^2 \cdot \cos^2(t)}{a^2} + \frac{b^2 \cdot \sin^2(t)}{b^2} = 1 \Rightarrow \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Das ist eine wahre Aussage.



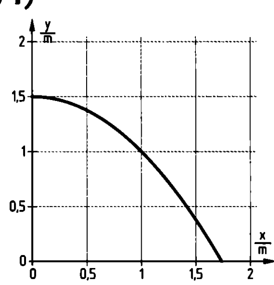
6.20 ***a)*** Amplituden: 1 bzw. 3; Frequenzverhältnis 2 : 1
b) Amplituden: 2 bzw. 2; Frequenzverhältnis 3 : 2
c) Amplituden: 4 bzw. 3; Frequenzverhältnis 1 : 1

6.21 ***a) 1)***



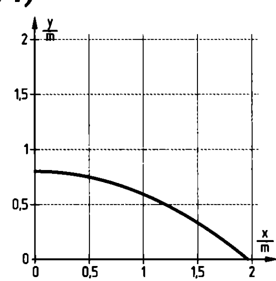
2) 1,2 m
3) $y = 1{,}8\ \text{m} - \frac{x^2}{0{,}8\ \text{m}}$

b) 1)



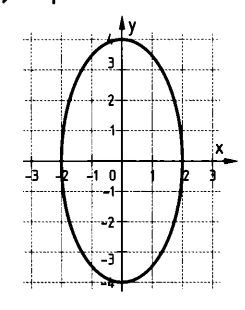
2) 1,732... m
3) $y = 1{,}5\ \text{m} - \frac{x^2}{2\ \text{m}}$

c) 1)

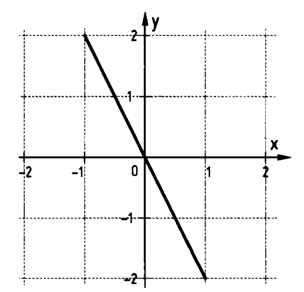


2) 1,959... m
3) $y = 0{,}8\ \text{m} - \frac{x^2}{4{,}8\ \text{m}}$

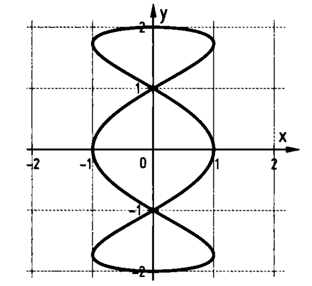
6.24 ***a)*** Ellipse



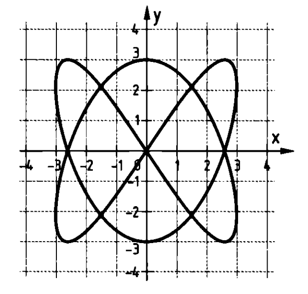
b) Gerade



c) Lissajous-Figur

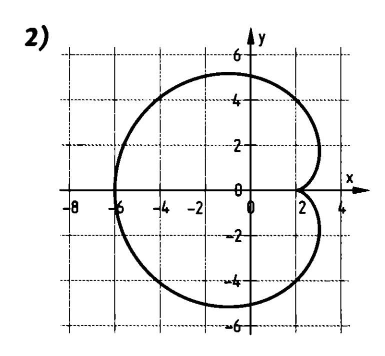


d) Lissajous-Figur



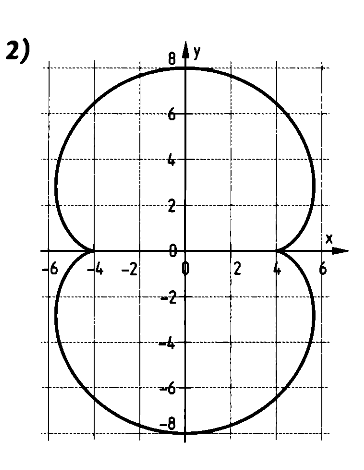
6.25 ***1)*** $x(t) = 2r \cdot \cos(t) - r \cdot \cos(2t)$
$y(t) = 2r \cdot \sin(t) - r \cdot \sin(2t)$

2)



6.26 ***1)*** Damit die gespitzte Epizykloide Nierenform hat (2 Spitzen), muss der kleinere Kreis k_2 beim Abrollen am größeren Kreis k_1 bei einem Umlauf genau zwei Umdrehungen machen. Der Umfang des größeren Kreises muss daher doppelt so groß wie der Umfang des kleineren Kreises sein. Die Radien verhalten sich gleich wie die Umfänge, und es muss $r_1 = 2 \cdot r_2$ sein. Für die Radien muss daher $r_1 : r_2 = 2 : 1$ gelten.

2)

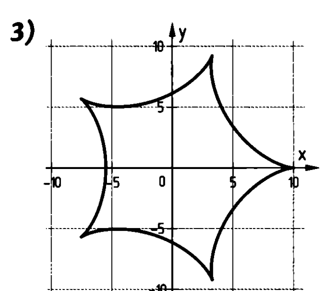


6.27 ***a) 1)*** $r_1 = 10;\ \ r_2 = 2$

2) $x(t) = 8 \cdot \cos\left(\frac{t}{5}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{4t}{5}\right)$

$y(t) = 8 \cdot \sin\left(\frac{t}{5}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{4t}{5}\right)$

3)

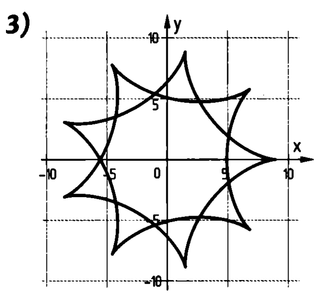


b) 1) $r_1 = 9;\ \ r_2 = 2$

2) $x(t) = 7 \cdot \cos\left(\frac{2t}{9}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{7t}{9}\right)$

$y(t) = 7 \cdot \sin\left(\frac{2t}{9}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{7t}{9}\right)$

3)

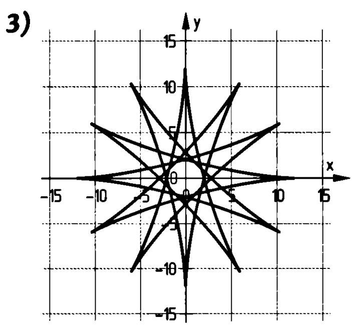


c) 1) $r_1 = 12;\ \ r_2 = 5$

2) $x(t) = 7 \cdot \cos\left(\frac{5t}{12}\right) + 5 \cdot \cos\left(\frac{7t}{12}\right)$

$y(t) = 7 \cdot \sin\left(\frac{5t}{12}\right) - 5 \cdot \sin\left(\frac{7t}{12}\right)$

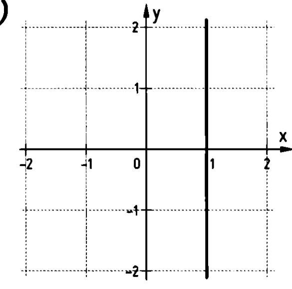
3)



6.28 ***a)*** A(6,708...; 63,434...°) ***c)*** C(3,534...; 115,114...°) ***e)*** E(−3|−5,196...)

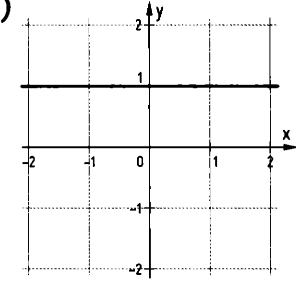
b) B(3,464...|2) ***d)*** D(4; 270°)

6.29 ***a) 1)***



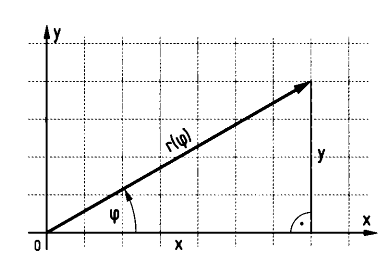
2) $x = 1$ Keine Funktion. Dem Wert $x = 1$ sind unendlich viele y-Werte zugeordnet.

b) 1)



2) $y = 1$
Konstante Funktion.

6.30



Die grafische Darstellung ergibt ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel φ und der Hypotenuse r(φ).

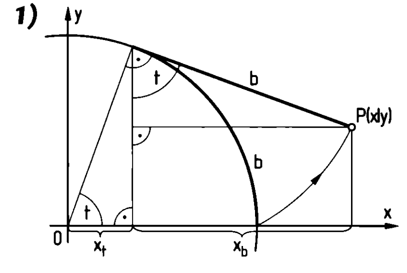
Für die Ankathete gilt

$\cos(\varphi) = \frac{x}{r(\varphi)} \Rightarrow x = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$

Für die Gegenkathete gilt

$\sin(\varphi) = \frac{y}{r(\varphi)} \Rightarrow y = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$

6.31 ***1)***



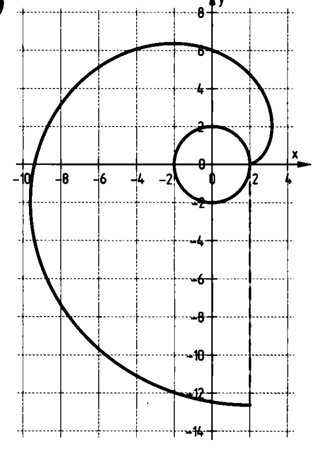
$x(t) = x_r + x_t = r \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(t)$

$b = \frac{2r\pi \cdot t}{2\pi} = r \cdot t$ einsetzen, ergibt

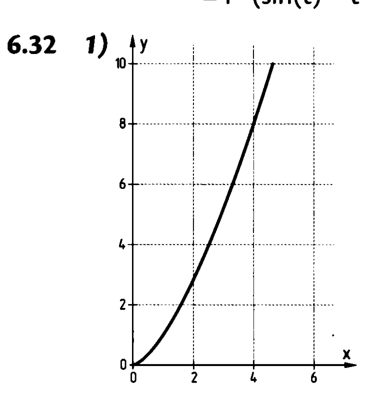
$x(t) = r \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t))$

analog $y(t) = r \cdot \sin(t) - b \cdot \cos(t) =$
$= r \cdot (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$

2)

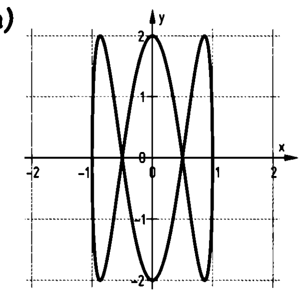


6.32 ***1)***



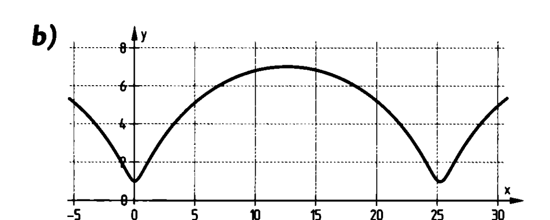
2) $y^2 - a^2 \cdot x^3 = 0$

6.33 **a)**



Lissajous-Figur

b)



Zykloide

6.34 $x(\varphi) = \sin(n \cdot \varphi) \cdot \cos(\varphi)$; $y(\varphi) = \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(\varphi)$

Ist die bei der Abrollbewegung entstehende Hypozykloide eine Rosenkurve, muss $r_1 - r_2 = a$ gelten.

Damit erhält man durch Herausheben für die Parameterdarstellung der Hypozykloide

$x(t) = (r_1 - r_2) \cdot \left(\cos\left(\frac{r_2}{r_1} \cdot t\right) + \cos\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot t\right)\right)$ bzw. $y(t) = (r_1 - r_2) \cdot \left(\sin\left(\frac{r_2}{r_1} \cdot t\right) - \sin\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot t\right)\right)$.

Anwenden des 2. Summensatzes ergibt

$x(t) = (r_1 - r_2) \cdot 2 \cdot \cos\left(\left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) \cdot \frac{t}{2}\right) \cdot \cos\left(\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) \cdot \frac{t}{2}\right)$

bzw. $y(t) = (r_1 - r_2) \cdot 2 \cdot \cos\left(\left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) \cdot \frac{t}{2}\right) \cdot \sin\left(\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1 - r_2}{r_1}\right) \cdot \frac{t}{2}\right)$.

Um die Parameterdarstellung der Rosenkurve zu erhalten, muss $(r_1 - r_2) \cdot 2 = 1$ sein und es folgt $r_1 - r_2 = a = 0{,}5$. Durch Vereinfachen der Argumente und Vergleich mit der Parameterdarstellung der Rosenkurve erhält man die weiteren Bedingungen

$r_1 = \frac{n}{n - 1}$ und $r_2 = \frac{n + 1}{2 \cdot (n - 1)}$, die für $n > 1$ Rosenkurven ergeben.

7 Komplexe Zahlen

7.3 ***a)*** -1 ***b)*** $-i$ ***c)*** -1 ***d)*** i ***e)*** i ***f)*** -1

7.4 ***a)*** 1 ***b)*** $-i$ ***c)*** -1 ***d)*** $-i$ ***e)*** 1 ***f)*** -1

7.5 i^m ist eine reelle Zahl, wenn m ein Vielfaches von zwei ist, und eine imaginäre Zahl, wenn m kein Vielfaches von zwei ist ($m \in \mathbb{Z}$).

7.6 ***a)*** $\{-7i; 7i\}$ ***b)*** $\{-7{,}280\ldots i; 7{,}280\ldots i\}$ ***c)*** $\{-0{,}5i; 0{,}5i\}$

7.7 ***a)*** $Re(z_1) = 11$, $Im(z_1) = 6$; $Re(z_2) = -5$, $Im(z_2) = 8$; $Re(z_3) = 12$, $Im(z_3) = 0$; $Re(z_4) = 0$, $Im(z_4) = \sqrt{3}$
b) $Re(z_1) = -3$, $Im(z_1) = -9$; $Re(z_2) = 0$, $Im(z_2) = -4$; $Re(z_3) = -7$, $Im(z_3) = 5$; $Re(z_4) = 0$, $Im(z_4) = \frac{1}{3}$

7.8 ***a)*** $12 + 2i$ ***b)*** $9 - 4i$ ***c)*** $x \cdot i$ ***d)*** $x - i$

7.9 ***1)*** $\mathbb{C}$ ***2)*** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ***3)*** $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ***4)*** $\mathbb{C}$ ***5)*** $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ***6)*** $\mathbb{C}$ ***7)*** $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

7.10 Diese Behauptung ist falsch. Für jede komplexe Zahl z gilt: $z = Re(z) + Im(z) \cdot i$.

7.11 $Re(Im(z)) = 0 \Rightarrow Im(z) = 0$
Das bedeutet, dass es sich um eine reelle Zahl handelt, also $z = a + 0 \cdot i$.
$Im(Re(z)) = 0 \Rightarrow Re(z) = a, a \in \mathbb{R}$
Das gilt für alle komplexe Zahlen, also $z = a + b \cdot i$.

7.13 $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -i$, $z_5 = 3 - i$

7.14

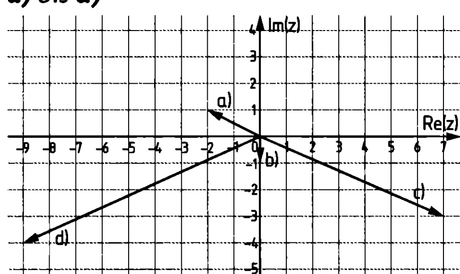
7.15 ***a)*** ***b)*** ***c)*** ***d)***

7.22 ***a)*** $(8{,}234\ldots; 65{,}613\ldots°) = 8{,}234\ldots \cdot (\cos(65{,}613\ldots°) + i \cdot \sin(65{,}613\ldots°)) = 8{,}234\ldots \underline{/65{,}613\ldots°} =$
$= 8{,}234\ldots \cdot e^{i \cdot 1{,}145\ldots}$
b) $-6{,}582\ldots + 12{,}919\ldots i = (14{,}5; 117°) = 14{,}5 \cdot (\cos(117°) + i \cdot \sin(117°)) = 14{,}5 \cdot e^{i \cdot 2{,}042\ldots}$
c) $0{,}348\ldots + 0{,}358\ldots i = (0{,}5; 45{,}836\ldots°) = 0{,}5 \cdot (\cos(45{,}836\ldots°) + i \cdot \sin(45{,}836\ldots°)) =$
$= 0{,}5 \underline{/45{,}836\ldots°} = 0{,}5 \cdot e^{i \cdot 0{,}8}$
d) $3{,}394\ldots + 3{,}394\ldots i = (4{,}8; 45°) = 4{,}8 \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°)) = 4{,}8 \underline{/45°}$
e) $10{,}075\ldots + 7{,}054\ldots i = (12{,}3; 35°) = 12{,}3 \underline{/35°} = 12{,}3 \cdot e^{i \cdot 0{,}785\ldots}$
f) $2{,}8 + 4{,}849\ldots i = (5{,}6; 60°) = 5{,}6 \cdot (\cos(60°) + i \cdot \sin(60°)) = 5{,}6 \underline{/60°} = 5{,}6 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$

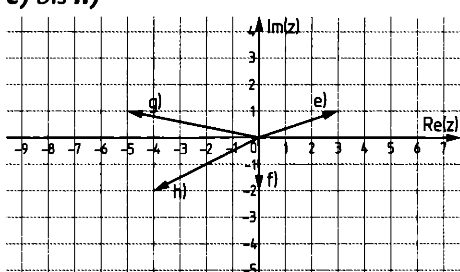
7.23 $z_1 = 9 + 5i$, $z_2 = -12 + 3i$, $z_3 = -5$, $z_4 = -4 - 8i$, $z_5 = -4i$, $z_6 = 7 - 6i$

7.24 ***a)*** 1. Quadrant ***b)*** negative reelle Achse ***c)*** negative reelle Achse ***d)*** negative imaginäre Achse ***e)*** 4. Quadrant ***f)*** 2. Quadrant ***g)*** 3. Quadrant ***h)*** 4. Quadrant

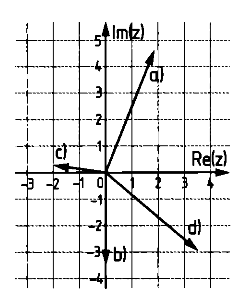
7.25 ***a)*** bis ***d)***



e) bis ***h)***



7.26

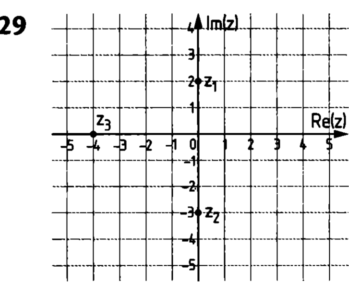


7.27 und **7.28**: Auf die Abbildung der Skizzen wird verzichtet.

7.27 ***a)*** $6 \cdot (\cos(180°) + i \cdot \sin(180°))$ ***b)*** $8 \cdot (\cos(90°) + i \cdot \sin(90°))$ ***c)*** $10 \cdot (\cos(0°) + i \cdot \sin(0°))$ ***d)*** $2{,}5 \cdot (\cos(270°) + i \cdot \sin(270°))$

7.28 ***a)*** $z = -5$ ***b)*** $z = 3i$ ***c)*** $z = 22{,}8$ ***d)*** $z = -7{,}6i$

7.29



$z_1 = 2i = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$; $z_2 = -3i = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$; $z_3 = -4 = 4 \cdot e^{i \cdot \pi}$

7.30 ***1)*** Falsch. Ist $\text{Re}(z) = 0$, so ist $\arg(z) = 90°$ oder $\arg(z) = 270°$.

2) Richtig. Der negative Imaginärteil wird auf der negativen y-Achse eingetragen.

3) Richtig. Liegt z im 2. Quadranten, dann ist $a < 0$ und $b > 0$. Der Bruch $\frac{b}{a}$ ist daher negativ. $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ergibt einen negativen Winkel im 4. Quadranten. Durch Addition von 180° erhält man den Winkel im 2. Quadranten.

4) Richtig. Ist $\text{Im}(z) = 0$, so liegt die Zahl auf der x-Achse.

7.31 ***1)*** 0° ***2)*** 180° ***3)*** 90° ***4)*** 270°

7.32 ***a)*** $(\sqrt{130}; 164{,}744...°)$; $\sqrt{130} \cdot (\cos(164{,}744...°) + i \cdot \sin(164{,}744...°))$; $\sqrt{130} \cdot e^{i \cdot 2{,}875...}$; $\sqrt{130}\ \underline{/164{,}744...°}$

b) $(\sqrt{85}; 347{,}471...°)$; $\sqrt{85} \cdot (\cos(347{,}471...°) + i \cdot \sin(347{,}471...°))$; $\sqrt{85} \cdot e^{i \cdot 6{,}064...}$; $\sqrt{85}\ \underline{/347{,}471...°}$

c) $-1{,}015... - 8{,}036...i$; $8{,}1 \cdot (\cos(262{,}8°) + i \cdot \sin(262{,}8°))$; $8{,}1 \cdot e^{i \cdot 4{,}586...}$; $8{,}1\ \underline{/262{,}8°}$

d) $4{,}971... - 2{,}987...i$; $5{,}8 \cdot (\cos(329{,}0°) + i \cdot \sin(329{,}0°))$; $5{,}8 \cdot e^{i \cdot 5{,}742...}$; $5{,}8\ \underline{/329{,}0°}$

7.33 ***a)*** $-0{,}463... + 3{,}569...j$; $(3{,}6; 97{,}402...°)$; $3{,}6 \cdot (\cos(97{,}402...°) + j \cdot \sin(97{,}402...°))$; $3{,}6 \underline{/97{,}402...°}$

b) $4{,}502... + 2{,}174...j$; $(5{,}0; 25{,}783...°)$; $5{,}0 \cdot (\cos(25{,}783...°) + j \cdot \sin(25{,}783...°))$; $5{,}0 \underline{/25{,}783...°}$

c) $36{,}428... - 98{,}478...j$; $(105{,}0; 290{,}3°)$; $105{,}0 \cdot e^{j \cdot 5{,}066...}$; $105{,}0 \underline{/290{,}3°}$

7.34 ***1) ⇒ B)*** ***2) ⇒ D)*** ***3) ⇒ A)*** ***4) ⇒ C)***

7.35 $5^i = e^{\ln(5) \cdot i} = -0{,}038... + 0{,}999...\,i$

7.36 LS: $e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$ (= RS)

Alle wichtigen Konstanten der Mathematik (1, e, i und π) kommen in diesem Satz vor.

7.39 ***1)*** $(3 + 7i) + (-3 - 6i) = i$

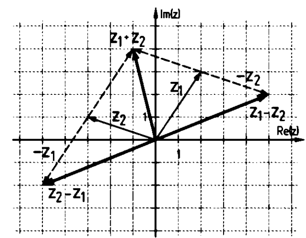
2) $(4 + 2i) + (-3 - 2i) = 1$

3) $(-3 + 6i) + (3 - 7i) = -i$

4) $(5 - 8i) + (-6 + 8i) = -1$

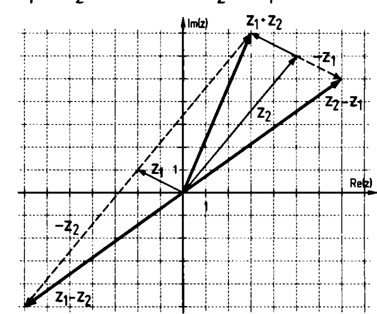
7.40 ***a)*** $z_1 + z_2 = -1 + 4i$

$z_1 - z_2 = 5 + 2i$; $z_2 - z_1 = -5 - 2i$



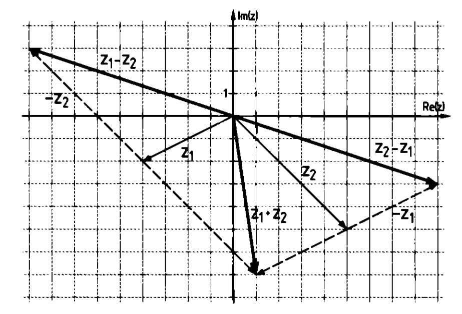
b) $z_1 + z_2 = 3 + 7i$

$z_1 - z_2 = -7 - 5i$; $z_2 - z_1 = 7 + 5i$

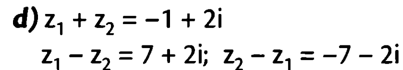


c) $z_1 + z_2 = 1 - 7i$

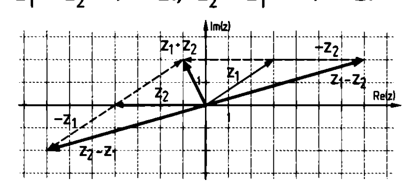
$z_1 - z_2 = -9 + 3i$; $z_2 - z_1 = 9 - 3i$

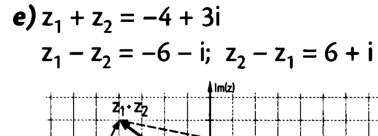


d) $z_1 + z_2 = -1 + 2i$



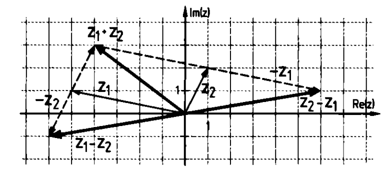
$z_1 - z_2 = 7 + 2i$; $z_2 - z_1 = -7 - 2i$



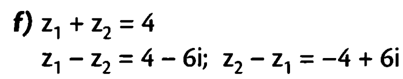


e) $z_1 + z_2 = -4 + 3i$

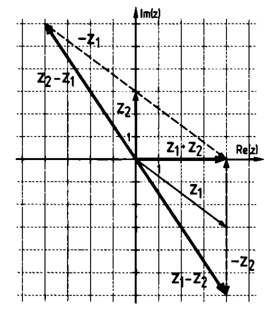
$z_1 - z_2 = -6 - i$; $z_2 - z_1 = 6 + i$



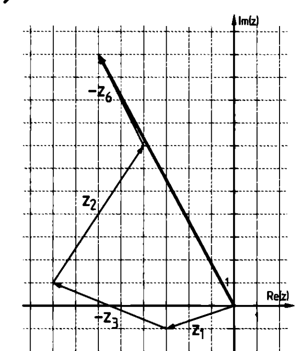
f) $z_1 + z_2 = 4$



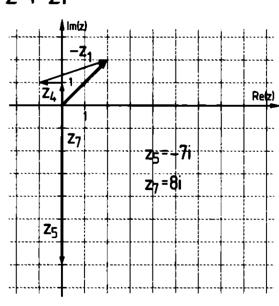
$z_1 - z_2 = 4 - 6i$; $z_2 - z_1 = -4 + 6i$



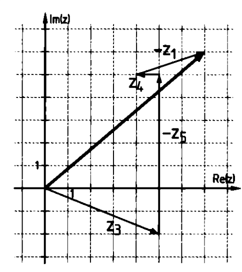
7.41 ***a)*** −6 + 11i



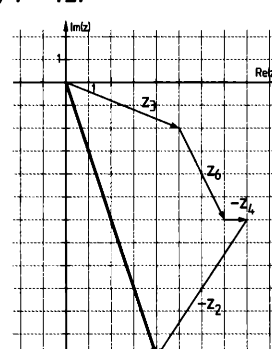
c) 2 + 2i



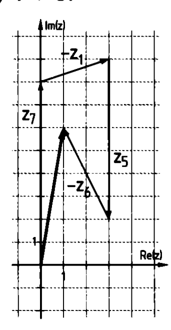
e) 7 + 6i



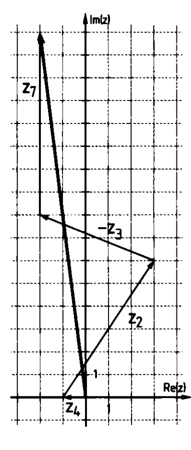
b) 4 − 12i



d) 1 + 6i



f) −2 + 16i



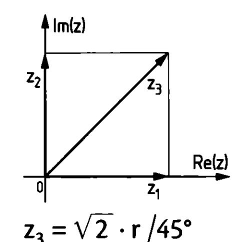
7.42 ***a)*** $z_1 + z_2 = 5{,}320... + 3{,}489...i$; $z_1 - z_2 = 3{,}340... + 1{,}510...i$; $z_2 - z_1 = -3{,}340... - 1{,}510...i$
b) $z_1 + z_2 = 8{,}958... + 0{,}765...i$; $z_1 - z_2 = -7{,}002 - 0{,}350...i$; $z_2 - z_1 = 7{,}002... + 0{,}350...i$
c) $z_1 + z_2 = -9{,}829... + 9{,}882...i$; $z_1 - z_2 = -9{,}829... + 3{,}882...i$; $z_2 - z_1 = 9{,}829... - 3{,}882...i$
d) $z_1 + z_2 = -8{,}432... + 18{,}863...j$; $z_1 - z_2 = 3{,}993... + 8{,}782...j$; $z_2 - z_1 = -3{,}993... - 8{,}782...j$
e) $z_1 + z_2 = -4{,}994... - 0{,}922...j$; $z_1 - z_2 = 1{,}790... + 3{,}316...j$; $z_2 - z_1 = -1{,}790... - 3{,}316...j$
f) $z_1 + z_2 = 4{,}958... + 4{,}654...j$; $z_1 - z_2 = -4{,}520... - 2{,}702...j$; $z_2 - z_1 = 4{,}520... + 2{,}702...j$

7.43 ***1)*** Richtig. $4i + (-4i) = 0$
Unterscheiden sich zwei imaginäre Zahlen nur durch das Vorzeichen, dann ist die Summe null, eine reelle Zahl.
2) Falsch. $3i - 3i = 0$
Werden zwei identische imaginäre Zahlen voneinander subtrahiert, dann ist die Differenz null, eine reelle Zahl.
3) Richtig. $(3 + 4i) + (7 - 4i) = 10$
Unterscheiden sich die Imaginärteile der beiden Zahlen nur durch das Vorzeichen, dann ist die Summe rein reell.
4) Richtig. $(4 - 2i) - (4 + 5i) = -7i$
Sind die Realteile der beiden Zahlen identisch, dann ist die Differenz rein imaginär.

7.44 ***1) 2)*** 5,099... Die beiden Werte sind gleich.
3) $|z_1 - z_2|$ gibt den Abstand der Spitzen der beiden Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene an.

7.45 – 7.56

7.45



$z_3 = \sqrt{2} \cdot r \,\underline{/45°}$

7.49 ***a)*** $8 + 38i$ ***b)*** $-230 + 410i$ ***c)*** $48 + 46i$

7.50 ***a)*** $(14; 68°)$ ***b)*** $(18; 145°)$ ***c)*** $8 \,\underline{/65°}$

7.51 ***a)*** $13 \cdot e^{j \cdot 1,4}$ ***b)*** $13,6 \cdot e^{j \cdot 3,786...}$

7.52
1) $7 + 4i$ Drehung um −90°
2) $-7 - 4i$ Drehung um 90°
3) $4 - 7i$ Drehung um 180°
4) $-14 - 8i$ Drehung um 90° und Streckung um den Faktor 2
5) $-28 - 16i$ Drehung um 90° und Streckung um den Faktor 4

7.53 ***a)*** 34 ***b)*** 16 ***c)*** 2 ***d)*** 25 ***e)*** 25

7.54
1) Die Addition zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt das Doppelte ihres Realteils.
$z + z^* = a + bi + a - bi = 2a$
2) Die Subtraktion zweier konjugiert komplexer Zahlen ergibt das Doppelte ihres Imaginärteils.
$z - z^* = a + bi - (a - bi) = 2bi$

7.55
1) Richtig. $(3 + 2j) \cdot (-j) = 2 - 3j$
Die Darstellung von (−j) in Polarform lautet (1; −90°). Bei der Multiplikation einer komplexen Zahl mit (−j) wird daher der Betrag mit 1 multipliziert und bleibt unverändert. Vom Winkel werden 90° subtrahiert, der Zeiger wird dadurch um 90° in negativer Richtung gedreht.
2) Falsch. $(6; 20°) \cdot 4 = (6; 20°) \cdot (4; 0°) = (24; 20°)$
Der Betrag wird 4mal so groß, das Argument bleibt aber gleich.
3) Falsch. $\text{Re}((2 - 2j) \cdot (3 + 4j)) = \text{Re}(14 + 2j) = 14 \neq 6 = \text{Re}(2 - 2j) \cdot \text{Re}(3 + 4j)$
Der Realteil des Produkts zweier komplexer Zahlen ist das Produkt der beiden Realteile vermehrt um das negative Produkt der beiden Imaginärteile.
4) Falsch. $z_1 = 2, z_2 = 5 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 10$
Das Produkt ist auch eine reelle Zahl, wenn die Imaginärteile beider Zahlen null sind.
5) Richtig. $(2 + 6i) \cdot (2 - 6i) = 4 - 12i + 12i - 36i^2 = 40$
Bei der Multiplikation zweier konjugiert komplexer Zahlen ist die Summe der sich ergebenden Imaginärteile stets null.

7.56
a) $z_2 = i;\; z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot i = ai - b = -b + ai$
b) $z_2 = 2;\; z_1 \cdot z_2 = r\underline{/\varphi} \cdot 2 \,\underline{/0°} = 2r \,\underline{/\varphi + 0°} = 2r \,\underline{/\varphi}$
c) $z_2 = \frac{1}{r}\,\underline{/-\varphi};\; z_1 \cdot z_2 = r \,\underline{/\varphi} \cdot \frac{1}{r}\,\underline{/-\varphi} = r \cdot \frac{1}{r}\,\underline{/\varphi - \varphi} = 1 \,\underline{/0°}$
d) $z_2 = -2i;\; z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (-2i) = -2ai + 2b = 2b - 2ai$

7.57 ***1)*** Zeichne eine Gerade durch die Spitze von z_2 und den Punkt (1|0). Übertrage die Länge von z_1 auf die reelle Achse. Zeichne eine Parallele zur zuvor gezeichneten Geraden durch den erhaltenen Schnittpunkt. Verlängere z_2 bis zum Schnittpunkt mit der Parallelen. Damit erhält man den Betrag $r_1 \cdot r_2$ des Produkts der beiden Zeiger. Übertrage den Betrag des Produkts auf jene Gerade, die die Summe der beiden Winkel angibt.

2) $-2{,}5 + 7{,}5i$

7.59 ***a)*** Definition der Eckpunkte analog zu 7.58. Der Drehung und Streckung entspricht die Multiplikation mit $z = \text{seite}\,\underline{/\varphi}$. Für „seite" wird ein Schieberegler definiert, der von 1 bis zB 5 mit Schrittweite 0,1 läuft. Für „phi" wird ein Schieberegler definiert, der von 0° bis 359° läuft. Danach wird die Variable z in Polarkoordinaten eingegeben, indem ein „;" als Trennzeichen verwendet wird: z = (seite; phi). Berechnung der neuen Eckpunkte analog zu 7.58. Nach dem Markieren beider Schieberegler mit der Tastenkombination CTRL+SHIFT+Anklicken kann die Animation für beide Schieberegler zugleich gestartet werden.

b) Definition der Eckpunkte und Einrichten des Schiebereglers analog zu 7.58. Die Eckpunkte des rotierenden Dreiecks werden wie folgt berechnet:
$A2 = (A - A) \cdot z + A = A;\ \ B2 = (B - A) \cdot z + A;\ \ C2 = (C - A) \cdot z + A.$

7.63 ***a)*** $-7 + 6i$ ***b)*** $\frac{-9-5j}{106}$ ***c)*** $-9 + 3i$ ***d)*** $\frac{11-3j}{130}$ ***e)*** $\frac{1+23i}{3}$ ***f)*** $\frac{-15-7j}{274}$

7.64 ***a)*** $\frac{15+17i}{4}$; $\frac{30-34i}{257}$ ***b)*** $\frac{2}{3}\,\underline{/-0{,}776...}$; $1{,}5\,\underline{/0{,}776...}$ ***c)*** $3{,}85\,\underline{/78°}$; $0{,}259...\,\underline{/282°}$

7.65 ***a)*** (0,65; 287°); (1,538...; 73°) ***b)*** (0,108...; 224°); (9,230...; 136°) ***c)*** (3,85; 78°); (0,259...; 282°)

7.66 ***a)*** $\frac{1}{3} \cdot e^{i \cdot (-0{,}1)}$; $3 \cdot e^{i \cdot 0{,}1}$ ***b)*** $\frac{5}{3} \cdot e^{i \cdot (-1{,}948...)}$; $0{,}6 \cdot e^{i \cdot 1{,}948...}$ ***c)*** $4{,}5 \cdot e^{i \cdot (-3{,}5)}$; $\frac{2}{9} \cdot e^{i \cdot 3{,}5}$

7.67 ***a)*** $\frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$

Den Bruch $\frac{1}{i}$ mit der konjugiert komplexen Zahl (–i) erweitern. Der Nenner ergibt 1. Das Ergebnis ist (–i).

$z = (1; 90°) \ \Rightarrow\ \frac{1}{z} = \frac{(1; 0°)}{(1; 90°)} = (1; -90°) = (1; 270°)$

Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{z}$ in Polarform anschreiben. Die Beträge dividieren und die Argumente subtrahieren ergibt (1, –90°). Das Ergebnis mit positivem Argument anschreiben.

b) $\frac{1 \cdot 3i}{-3i \cdot 3i} = \frac{3i}{-9i^2} = \frac{i}{3}$

Den Bruch $\frac{1}{-3i}$ mit der konjugiert komplexen Zahl 3i erweitern. Der Nenner ergibt 9. Kürzen durch drei ergibt $\frac{i}{3}$.

$z = (3; 270°) \ \Rightarrow\ \frac{1}{z} = \frac{(1; 0°)}{(3; 270°)} = \left(\frac{1}{3}; -270°\right) = \left(\frac{1}{3}; 90°\right)$

Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{z}$ in Polarform anschreiben. Die Beträge dividieren und die Argumente subtrahieren ergibt $\left(\frac{1}{3}; -270°\right)$. Das Ergebnis mit positivem Argument anschreiben.

c) $z = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2i \Rightarrow \frac{1 \cdot (-2i)}{2i \cdot (-2i)} = \frac{-2i}{-4i^2} = -\frac{1}{2} \cdot i$

Umformen der komplexen Zahl in die Komponentenform durch Einsetzen in die trigonometrische Form. Den Bruch $\frac{1}{2i}$ mit der konjugiert komplexen Zahl $(-2i)$ erweitern. Der Nenner ergibt 4. Kürzen durch 2 ergibt $\left(-\frac{i}{2}\right)$.

$\frac{(1; 0)}{(2; 90°)} = \left(\frac{1}{2}; -90°\right) = \left(\frac{1}{2}; 270°\right)$

Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{z}$ in Polarform anschreiben. Die Beträge dividieren und die Argumente subtrahieren ergibt $\left(\frac{1}{2}; -90°\right)$. Das Ergebnis mit positivem Argument anschreiben.

d) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{/45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos(45°) + i \cdot \sin(45°)) = 0{,}5 + 0{,}5i \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1 \cdot (0{,}5 - 0{,}5i)}{(0{,}5 + 0{,}5i) \cdot (0{,}5 - 0{,}5i)} = \frac{0{,}5 - 0{,}5i}{0{,}25 - 0{,}25i^2} = \frac{0{,}5 - 0{,}5i}{0{,}5} = 1 - i$

Umformen der komplexen Zahl in die Komponentenform durch Einsetzen in die trigonometrische Form. Den Bruch $\frac{1}{0{,}5 + 0{,}5i}$ mit der konjugiert komplexen Zahl $(0{,}5 - 0{,}5i)$ erweitern. Der Nenner ergibt 0,5. Kürzen durch 0,5 ergibt $(1 - i)$.

$\frac{(1; 0°)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 45°\right)} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}; -45°\right) = (\sqrt{2}; 315°)$

Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{1}{z}$ in Polarform anschreiben. Die Beträge dividieren und die Argumente subtrahieren ergibt $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}; -45°\right)$. Das Ergebnis gekürzt und mit positivem Argument anschreiben.

7.68 ***a)*** $r \underline{/0°}$; $\frac{r \underline{/\varphi}}{r \underline{/0°}} = \frac{r}{r} \underline{/\varphi - 0°} = 1 \underline{/\varphi} = w$

b) i; $\frac{a + bi}{i} = \frac{a \cdot (-i) - bi^2}{1} = b - ai = w$

c) $\frac{1}{r} \cdot e^{i \cdot \varphi}$; $\frac{e^{i \cdot \varphi}}{\frac{1}{r} \cdot e^{i \cdot \varphi}} = r \cdot e^{i \cdot (\varphi - \varphi)} = r \cdot e^{i \cdot 0} = r = w$

7.69 ***1)*** Drehe beide Zeiger um den Winkel $(-\varphi_2)$. Zeichne eine Parallele zur Verbindung der Spitzen der gedrehten Lagen durch den Punkt $(1|0)$. Der Schnittpunkt der Parallelen mit der gedrehten Lage von z_1 ist die Spitze des Zeigers $\frac{z_1}{z_2}$.

2) a) (3,25; 32,380...°) ***b)*** (5; 320°)

Bei ***a)*** ist im Erstdruck leider ein Druckfehler aufgetreten. Richtig müsste die Angabe $z_1 = 5 + 12i$ lauten.

7.70 ***a)*** $\frac{1\,179 - 903i}{130}$ ***b)*** $\frac{-105 + 165i}{34}$ ***c)*** (6,568...; 30,793...°) ***d)*** $8{,}186... \underline{/79{,}711...°}$ ***e)*** $3{,}787... \cdot e^{i \cdot 1{,}265...}$ ***f)*** 1,190...

7.71 ***a)*** $\frac{-9 + 33i}{10}$ ***b)*** $\frac{2\,821 - 1\,533i}{218}$ ***c)*** $27{,}692... \underline{/39{,}073...°}$ ***d)*** (13,389...; 41,316...°) ***e)*** $8{,}205... \cdot e^{i \cdot 4{,}447...}$ ***f)*** $0{,}136... \cdot e^{i \cdot 4{,}712...}$

7.72 ***a)*** (181,664; 260,174...°) ***b)*** (58,309...; 300,963...°) ***c)*** (756,502...; 250,702...°) ***d)*** (32,015...; 321,340...°)

7.73 ***a)*** $-2{,}064... + 1{,}275...i$ ***b)*** $212 + 97i$ ***c)*** $119{,}444... + 192{,}683...i$ ***d)*** $9{,}5 + 138{,}791...i$

7.74 ***a)*** $507{,}089... - 72{,}598...i = (512{,}260...; 351{,}852...°) = 512{,}260...\ \underline{/351{,}852...°} =$
$= 512{,}260... \cdot (\cos(351{,}852...°) + i \cdot \sin(351{,}852...°)) = 512{,}260... \cdot e^{i \cdot 6{,}140...}$
b) $17{,}054... - 4{,}267...i = (17{,}580...; 345{,}953...°) = 17{,}580...\ \underline{/345{,}953...°} =$
$= 17{,}580... \cdot (\cos(345{,}953...°) + i \cdot \sin(345{,}953...°)) = 17{,}580... \cdot e^{i \cdot 6{,}038...}$
c) $0{,}002... - 0{,}027...i = (0{,}027...; 274{,}361...°) = 0{,}027...\ \underline{/274{,}361...°} =$
$= 0{,}027... \cdot (\cos(274{,}361...°) + i \cdot \sin(274{,}361...°)) = 0{,}027... \cdot e^{i \cdot 4{,}788...}$
d) $-6{,}488... - 3{,}878...i = (7{,}559...; 210{,}871...°) = 7{,}559...\ \underline{/210{,}871...°} =$
$= 7{,}559... \cdot (\cos(210{,}871...°) + i \cdot \sin(210{,}871...°)) = 7{,}559... \cdot e^{i \cdot 3{,}680...}$

7.75 ***a)*** $\text{Re}(z) = \frac{b}{b^2+1};\ \text{Im}(z) = \frac{b^2+2}{b^2+1}$ ***c)*** $\text{Re}(z) = \frac{1}{b};\ \text{Im}(z) = a$
b) $\text{Re}(z) = 0;\ \text{Im}(z) = 1$ ***d)*** $\text{Re}(z) = 0;\ \text{Im}(z) = \frac{bc-d}{bd}$

7.76 Nein.
$z = 1 + \frac{1+aj}{2a-j} = 1 + \frac{(1+aj)\cdot(2a+j)}{(2a-j)\cdot(2a+j)} = 1 + \frac{2a+j+2a^2j+aj^2}{4a^2-j^2} = 1 + \frac{a+(1+2a^2)\cdot j}{4a^2+1} = \left(1 + \frac{a}{4a^2+1}\right) + \frac{2a^2+1}{4a^2+1}\cdot j$
z ist reell, wenn $\text{Im}(z) = \frac{2a^2+1}{4a^2+1}$ null ist. Multiplikation mit dem Nenner ergibt die Gleichung $2a^2 + 1 = 0$. Umformen ergibt $a^2 = -\frac{1}{2}$. Es gibt keine reelle Zahl a, die diese Bedingung erfüllt.

7.77 w bzw. z haben die Form $w = a + bi$ bzw. $z = c + di$. Zur Begründung wird jeweils der Term auf der linken Seite der Aussage (LS) mit dem Term auf der rechten Seite der Aussage (RS) verglichen.
1) Richtig.
LS: $w^* + z^* = a - bi + c - di = a + c - (b+d)\cdot i$,
RS: $(w+z)^* = (a + c + (b+d)\cdot i)^* = a + c - (b+d)\cdot i$;
zB: $w = 1 + i,\ z = 2 - 3i \Rightarrow \text{LS} = 3 + 2i = \text{RS}$
2) Richtig.
LS: $\text{Im}(w^*) = \text{Im}(a - bi) = -bi$, RS: $-\text{Im}(w) = -\text{Im}(a+bi) = -bi$; zB: $w = 1 + i \Rightarrow \text{LS} = -i = \text{RS}$
3) Falsch.
LS: $(z^*)^* = (c - di)^* = c + di$, RS: $-z = -c - di$; zB: $z = 2 - 3i \Rightarrow \text{LS} = 2 - 3i \neq \text{RS} = -2 + 3i$
4) Richtig.
LS: $|-z| = |-c-di| = \sqrt{c^2+d^2}$, RS: $|z^*| = |c - di| = \sqrt{c^2+d^2}$; zB: $z = 2 - 3i \Rightarrow \text{LS} = \sqrt{13} = \text{RS}$
5) Falsch.
LS: $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{c+di}\right) = \text{Re}\left(\frac{c-di}{c^2+d^2}\right) = \frac{c}{c^2+d^2}$, RS: $\frac{1}{\text{Re}(z)} = \frac{1}{\text{Re}(c+di)} = \frac{1}{c}$;
zB: $z = 2 - 3i \Rightarrow \text{LS} = \frac{2}{13} \neq \text{RS} = \frac{1}{2}$
6) Richtig.
LS: $\arg(z\cdot z^*) = \arg((c+di)\cdot(c-di)) = \arg(c^2+d^2) = \arg(c^2+d^2+0i) = \arctan\left(\frac{0}{c^2+d^2}\right) = 0$, RS: 0;
zB: $z = 2 - 3i \Rightarrow \text{LS} = \arg(13 + 0i) = 0 = \text{RS}$

7.78 $b = -\sqrt{1-a^2}$ bzw. $b = \sqrt{1-a^2}$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$; zB $z = 1$, $z = i$, $z = 0{,}8 + 0{,}6i$

7.79 ***1)*** LS: $1 - (-4 - 12i) = 5 + 12i$; RS: $(1 - (-4 + 12i))^* = (5 - 12i)^* = 5 + 12i$; LS = RS
2) $z = a + bi \Rightarrow$ LS: $1 - (a - bi) = 1 - a + bi$; RS: $(1 - (a + bi))^* = (1 - a - bi)^* = 1 - a + bi$; LS = RS

7.80 ***1)*** $\text{LS} = \text{RS} = \frac{8}{113} - \frac{7}{113}i$ ***2)*** $z = a + bi \Rightarrow$ LS: $\left(\frac{1}{a+bi}\right)^* = \left(\frac{a-bi}{a+b}\right)^* = \frac{a+bi}{a+b}$; RS: $\frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{a+b}$; LS = RS

7.81 Für $z = a + bi$ gilt:
LS: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)^* = \left(\frac{ac+bd+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}\right)^* = \frac{ac+bd-(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}$; RS: $\frac{z_1^*}{z_2^*} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{ac+bd-(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2}$;
LS = RS

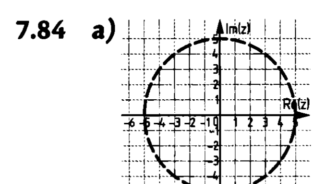
7.82 ***a)*** $2 \cdot \arg(z)$ für $0° \leq \arg(z) \leq 90°$, $2 \cdot |180° - \arg(z)|$ für $90° < \arg(z) \leq 270°$, $2 \cdot (360° - \arg(z))$ für $270° < \arg(z) < 360°$

b) $2 \cdot |90° - \arg(z)|$ für $0° \leq \arg(z) < 180°$, $2 \cdot |270° - \arg(z)|$ für $180° \leq \arg(z) < 360°$

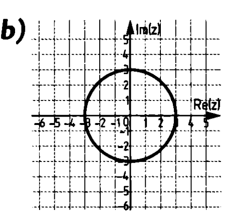
c) $2 \cdot \arg(z)$ für $0° \leq \arg(z) \leq 90°$, $2 \cdot |180° - \arg(z)|$ für $90° < \arg(z) \leq 270°$, $2 \cdot (360° - \arg(z))$ für $270° < \arg(z) < 360°$

7.83 ***a)*** 4. Quadrant ***b)*** 3. Quadrant ***c)*** 1. Quadrant

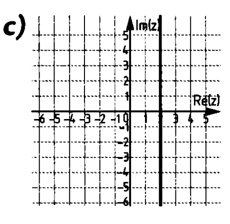
7.84 ***a)***



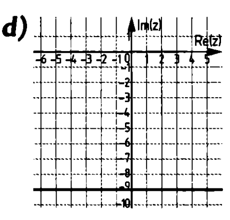
b)



c)



d)



7.85 ***1)*** $24 + 10i$ ***2)*** $(49; 22{,}6°)$ ***3)*** $(12{,}25 \cdot e^{i \cdot 1{,}32})$

7.87 ***a)*** $-21 + 20i = (29; 136{,}397...°)$
b) $2 + 2i = (2 \cdot \sqrt{2}; 45°)$
c) $-5 - 12i = (13; 247{,}380...°)$
d) $46 - 9i = (13 \cdot \sqrt{13}; 348{,}929...°)$
a) bis ***d)*** Die Ergebnisse stimmen überein.

7.88 ***a) 1)*** $316 - 12i$ ***2)*** $(316{,}227...; 357{,}825...°)$
b) 1) $-85{,}879... + 498{,}456...i$ ***2)*** $(505{,}800...; 99{,}775...°)$
c) 1) $17{,}968... + 31{,}122...i$ ***2)*** $(35{,}937...; 60°)$
d) 1) $-0{,}136... + 0{,}224...i$ ***2)*** $(0{,}262...; 2{,}116...)$
e) 1) $512 - 512 \cdot \sqrt{3} \cdot i$ ***2)*** $\left(1\,024; \frac{5\pi}{3}\right)$
f) 1) $0{,}5i$ ***2)*** $(0{,}5; 90°)$
g) 1) $31{,}929... - 2{,}122...i$ ***2)*** $(32; 6{,}216...)$
h) 1) $-2{,}073...$ ***2)*** $(2{,}073...; \pi)$

7.89 ***1)*** $n = 4 \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ ***2)*** $n = 4 \cdot k + 2, k \in \mathbb{Z}$

7.90 ***1)*** $a = \frac{4k+1}{3}, k \in \mathbb{Z}$ ***2)*** $a = \frac{4k+3}{3}, k \in \mathbb{Z}$

7.91 Für $z = (r; \varphi)$ gilt:
LS: $z^{-n} = (r; \varphi)^{-n} = (r^{-n}; -n \cdot \varphi) = \left(\frac{1}{r^n}; -n \cdot \varphi\right)$;
RS: $\frac{1}{z^n} = \frac{(1; 0)}{(r^n; n \cdot \varphi)} = \left(\frac{1}{r^n}; 0 - n \cdot \varphi\right) = \left(\frac{1}{r^n}; -n \cdot \varphi\right)$; LS=RS

7.94 ***a)*** $z_1 = 1 = (1; 0°)$, $z_2 = -1 = (1; 180°)$
b) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i = (1; 45°)$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i = (1; 225°)$
c) $z_1 = i = (1; 90°)$, $z_2 = -i = (1; 270°)$
d) $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i = (1; 135°)$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i = (1; 315°)$
a) bis ***d)*** Die Zahl unter der Wurzel in Polarform umrechnen. Aus dem Betrag die Wurzel ziehen und den Winkel durch 2 dividieren ergibt die erste Lösung z_1. Für die weitere Lösung $\frac{360°}{2} = 180°$ addieren ergibt z_2. Beide Lösungen umrechnen in Komponentenform. Bei ***b)*** und bei ***d)*** sind Realteil und Imaginärteil gleich groß und daher die Seitenlängen eines Quadrats mit Diagonalenlänge 1. Daraus ergibt sich ihr Wert mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.95 ***a) 1)*** $z_1 = 0{,}201... + 1{,}292...i$, $z_2 = -1{,}219... - 0{,}471...i$, $z_3 = 1{,}018... - 0{,}820...i$

2) $z_1 = (1{,}307...;\, 81{,}144...°)$, $z_2 = (1{,}307...;\, 201{,}144...°)$, $z_3 = (1{,}307...;\, 321{,}144...°)$

3) $z_1 = 1{,}307... \cdot e^{i \cdot 1{,}416...}$, $z_2 = 1{,}307... \cdot e^{i \cdot 3{,}510...}$, $z_3 = 1{,}307... \cdot e^{i \cdot 5{,}605...}$

b) 1) $z_1 = 2{,}331... + 0{,}659...i$, $z_2 = 0{,}093... + 2{,}421...i$, $z_3 = -2{,}274... + 0{,}837...i$, $z_4 = -1{,}498... - 1{,}904...i$, $z_5 = 1{,}347... - 2{,}013...i$

2) $z_1 = (2{,}423...;\, 15{,}791...°)$, $z_2 = (2{,}423...;\, 87{,}791...°)$, $z_3 = (2{,}423...;\, 159{,}791...°)$, $z_4 = (2{,}423...;\, 231{,}791...°)$, $z_5 = (2{,}423...;\, 303{,}791...°)$

3) $z_1 = 2{,}423... \cdot e^{i \cdot 0{,}275...}$, $z_2 = 2{,}423... \cdot e^{i \cdot 1{,}532...}$, $z_3 = 2{,}423... \cdot e^{i \cdot 2{,}788...}$, $z_4 = 2{,}423... \cdot e^{i \cdot 4{,}045...}$, $z_5 = 2{,}423... \cdot e^{i \cdot 5{,}302...}$

c) 1) $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$, $z_4 = -\sqrt{3} - i$, $z_5 = -2i$, $z_6 = \sqrt{3} - i$

2) $z_1 = (2;\, 30°)$, $z_2 = (2;\, 90°)$, $z_3 = (2;\, 150°)$, $z_4 = (2;\, 210°)$, $z_5 = (2;\, 270°)$, $z_6 = (2;\, 330°)$

3) $z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$, $z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$, $z_4 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{6}}$, $z_5 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}}$, $z_6 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{11\pi}{6}}$

d) 1) $z_1 = 2{,}427... + 1{,}763...i$, $z_2 = -0{,}927... + 2{,}853...i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -0{,}927... - 2{,}853...i$, $z_5 = 2{,}427... - 1{,}763...i$

2) $z_1 = (3;\, 36°)$, $z_2 = (3;\, 108°)$, $z_3 = (3;\, 180°)$, $z_4 = (3;\, 252°)$, $z_5 = (3;\, 324°)$

3) $z_1 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{5}}$, $z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{5}}$, $z_3 = 3 \cdot e^{i \cdot \pi}$, $z_4 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{7\pi}{5}}$, $z_5 = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{9\pi}{5}}$

7.96 ***1)*** $x = 4$ ***2)*** $z_1 = -4$, $z_2 = 4$

Die Ergebnisse sind verschieden. In $\mathbb{R}$ bedeutet $\sqrt{16}$ jene positive reelle Zahl x zu ermitteln, für die $x^2 = 16$ gilt. Diese Bedingung erfüllt nur die Zahl 4. In $\mathbb{C}$ bedeutet $\sqrt{16}$ alle Lösungen der Gleichung $z^2 = 16$ zu ermitteln. Diese Bedingung erfüllen die Zahlen −4 und 4.

7.97 $z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{8}}$, $z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{9\pi}{8}}$

7.98 Für $a \in \mathbb{R}^-$ ergibt das Umformen auf Polarform $(|a|;\, 180°)$. Die Berechnung von $z = \sqrt{a}$ ergibt

$z_1 = \left(\sqrt{|a|};\, \frac{180°}{2}\right) = (\sqrt{|a|};\, 90°) = 0 + \sqrt{|a|} \cdot i = \sqrt{|a|} \cdot i$ bzw.

$z_2 = \left(\sqrt{|a|};\, 90° + \frac{360°}{2}\right) = (\sqrt{|a|};\, 270°) = 0 - \sqrt{|a|} \cdot i = -\sqrt{|a|} \cdot i$

7.99

a) $z = -597 + 122i$
$z_1 = 3 + 2i$
$z_2 = -0{,}975... + 3{,}471...i$
$z_3 = -3{,}602... + 0{,}145...i$
$z_4 = -1{,}251... - 3{,}381...i$
$z_5 = 2{,}829... - 2{,}235...i$

b) $z = -2{,}621... \cdot 10^{11}$
$z_1 = 69{,}282... + 40i$
$z_2 = 80i$
$z_3 = -69{,}282... + 40i$
$z_4 = -69{,}282... - 40i$
$z_5 = -80i$
$z_6 = 69{,}282... - 40i$

c) $z = 4{,}419... \cdot 10^{11} + 8{,}354...i \cdot 10^{11}$
$z_1 = 31{,}112... + 4{,}242...i$
$z_2 = 19 + 25i$
$z_3 = -4{,}242... + 31{,}112...i$
$z_4 = -25 + 19i$
$z_5 = -31{,}112... - 4{,}242...i$
$z_6 = -19 - 25i$
$z_7 = 4{,}242... - 31{,}112...i$
$z_8 = 25 - 19i$

d) $z = -1{,}122... \cdot 10^{20} + 8{,}538...i \cdot 10^{18}$
$z_1 = 96{,}474... + 30{,}538...i$
$z_2 = 60{,}099... + 81{,}412...i$
$z_3 = 0{,}768... + 101{,}189...i$
$z_4 = -58{,}856... + 82{,}315...i$
$z_5 = -96 + 32i$
$z_6 = -96{,}474... - 30{,}538...i$
$z_7 = -60{,}099... - 81{,}412...i$
$z_8 = -0{,}768... - 101{,}189...i$
$z_9 = 58{,}856... - 82{,}315...i$
$z_{10} = 96 - 32i$

7.100 ***1)*** zwei reelle Nullstellen ***2)*** eine reelle Nullstelle ***3)*** keine reelle Nullstelle

7.102 ***a)*** $\{-\sqrt{2}\cdot i, \sqrt{2}\cdot i\}$ ***b)*** $\left\{-\frac{4}{3}\cdot i, \frac{4}{3}\cdot i\right\}$ ***c)*** $\{-\sqrt{3}\cdot i, \sqrt{3}\cdot i\}$

7.103 ***a)*** $\{5-7i, 5+7i\}$ ***c)*** $\{2-i, 2+i\}$ ***e)*** $\{-2-\sqrt{3}\cdot i, -2+\sqrt{3}\cdot i\}$
b) $\left\{\frac{5}{2}-i, \frac{5}{2}+i\right\}$ ***d)*** $\{-4-12{,}790...i, -4+12{,}790...i\}$ ***f)*** $\left\{\frac{7}{5}-\frac{31}{5}i, \frac{7}{5}+\frac{31}{5}i\right\}$

7.104 ***a)*** $\left\{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i, \frac{5}{3}+\frac{2}{3}i\right\}$ ***b)*** $\left\{-\frac{7}{3}-\frac{2}{3}i, -\frac{7}{3}+\frac{2}{3}i\right\}$

7.106 ***a) 1)*** $\{\,\}$ ***2)*** $\{0{,}02-1{,}117...i, 0{,}02+1{,}117...i\}$
b) 1) $\{\,\}$ ***2)*** $\{0{,}001-0{,}104...i, 0{,}001+0{,}104...i\}$

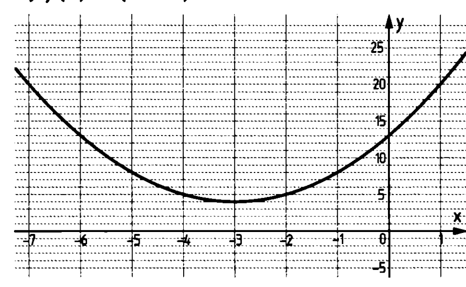
7.107 ***a)*** $\left(z+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i\right)\cdot\left(z+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\right)$ ***b)*** $(z-10-i)\cdot(z-10+i)$ ***c)*** $4\cdot\left(z+\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{91}}{4}i\right)\cdot\left(z+\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{91}}{4}i\right)$

7.108 Sind $z_1 = a + bi$ und $z_2 = a - bi$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + pz + q = 0$, so erhält man für das Produkt der Linearfaktoren $(z - (a + bi))\cdot(z - (a - bi)) =$
$= z^2 - z\cdot(a + bi) - z\cdot(a - bi) + (a + bi)\cdot(a - bi) = z^2 - (a + bi + a - bi)\cdot z + a^2 + b^2 =$
$= z^2 - 2a\cdot z + a^2 + b^2$. Die Summe der beiden Lösungen ergibt $z_1 + z_2 = a + bi + a - bi = 2a$ und das Produkt der beiden Lösungen ergibt $z_1\cdot z_2 = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 + b^2$.
Insgesamt ist also $(z - z_1)\cdot(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)\cdot z + z_1\cdot z_2$ und der Satz von Vieta daher gültig.

7.109 Nach dem Satz von Vieta gilt $\frac{x^2 + p_1x + q_1}{x^2 + p_2x + q_2} = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x - x_3)\cdot(x - x_4)}$. Der Term kann gekürzt werden, wenn $x_1 = x_3$, $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$ oder $x_2 = x_4$ ist.
Angenommen ein Bruch ist in $\mathbb{R}$ nicht kürzbar, $x_1 = a + bi$ mit $b \neq 0$ ist eine komplexe Zahl und es gilt zB $x_1 = x_3$. Der Bruch ist unter dieser Annahme in $\mathbb{C}$ kürzbar. Für den zweiten Linearfaktor des Zählers gilt $x_2 = x_1^* = a - bi$ und für den zweiten Linearfaktor des Nenners gilt $x_4 = x_3^* = a - bi$. Zähler und Nenner stimmen daher überein und können auch für $G = \mathbb{R}$ gekürzt werden. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. Ein Bruch, der für $G = \mathbb{R}$ nicht gekürzt werden kann, ist daher auch für $G = \mathbb{C}$ nicht kürzbar.

7.110 ***1)*** Richtig. Für $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqslant 0$ hat die Gleichung zwei reelle Lösungen. Der Imaginärteil ist null.
2) Richtig. Für $p = 0$ und $q > 0$ gilt $x_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 - q} = \pm\sqrt{-q} = \pm\sqrt{q}\cdot i$.
3) Falsch. Eine quadratische Gleichung hat entweder zwei verschiedene reelle Lösungen, eine reelle Lösung (Doppellösung) oder zwei komplexe Lösungen.
4) Richtig. Die beiden komplexen Lösungen sind zueinander konjugiert komplexe Zahlen. Ihre Imaginärteile haben daher immer verschiedenes Vorzeichen.
5) Falsch. Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ ist der Realteil $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

7.111 ***1)*** $x_1 = -3 + 2i$, $x_2 = -3 - 2i$
2) $y(x) = (x + 3)^2 + 4$



Der Realteil der Lösungen gibt die Verschiebung der Parabel in x-Richtung an, das Quadrat des Imaginärteils die Verschiebung in y-Richtung.

7.112 ***1)*** $5 + 3i$, $5 - 3i$

2) ZB: Das Produkt zweier Zahlen ist 2, ihre Summe beträgt auch 2. $\Rightarrow$ $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$
Das Produkt zweier Zahlen ist 1, ihre Summe beträgt 2. $\Rightarrow$ $z_1 = z_2 = 1$
Das Produkt zweier Zahlen ist 2, ihre Summe beträgt 3. $\Rightarrow$ $z_1 = 1$, $z_2 = 2$

7.113 ZB: $x^3 = 0$ bzw. $x^3 - x = 0$.
Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat eine Gleichung 3. Grads drei Lösungen. Ist $z_1 = a + bi$ eine der drei Lösungen, so ist $z_2 = a - bi$ eine weitere Lösung. Dies ist bei genau zwei reellen Lösungen nicht möglich.

7.114 $\{-3, 2, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\}$

7.115 ***a)*** Einsetzen von $z_1 = 3 + 2i$ in die Gleichung ergibt nicht null, $3 + 2i$ ist nicht Lösung der Gleichung. $\{-2{,}462..., 2{,}794..., 5{,}668...\}$

b) Einsetzen von $z_1 = 4 - 2i$ in die Gleichung ergibt null, damit ist $4 - 2i$ Lösung der Gleichung. Weitere Lösungen: $z_2 = 4 + 2i$ und $z_3 = 2$.

7.116 $\left\{-1, \frac{1}{2}, -i, i\right\}$

7.117 Angenommen $z = r + si$ ist eine Lösung der Gleichung $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$.
Einsetzen von $r + si$ in die Gleichung, Auflösen der Klammern und Ordnen nach Real- und Imaginärteil ergibt $(ar^3 + br^2 + cr + d - 3ars^2 - bs^2) + (3ar^2s + 2brs + cs - as^3) \cdot i = 0$. Die linke Seite ist null, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil null sind.
Einsetzen von $r - si$ in die Gleichung, Auflösen der Klammern und Ordnen nach Real- und Imaginärteil ergibt $(ar^3 + br^2 + cr + d - 3ars^2 - bs^2) - (3ar^2s + 2brs + cs - as^3) \cdot i = 0$.
Die Beträge von Real- und Imaginärteil stimmen mit dem beim Einsetzen von $r + si$ erhaltenen Ergebnis überein und sind daher beide null. Es ergibt sich also auch für $z = r - si$ eine wahre Aussage, $z = r - si$ ist damit ebenfalls Lösung der Gleichung.

7.119 ***a)*** $\{-7i, 5i\}$ ***b)*** $\{-24i, 4i\}$ ***c)*** $\{-5i, -0{,}6i\}$

7.120 ***a)*** $\{18, -5i\}$ ***b)*** $\{-1{,}526... - 2{,}480...i, 10{,}526... + 6{,}480...i\}$

7.121 ***a)*** $\{-5{,}708... - 2{,}045...i, 0{,}708... - 0{,}954...i\}$ ***b)*** $\{0{,}363... + 0{,}978...i, 0{,}636... - 9{,}978...i\}$

7.122 ***a)*** $\{(3 - 7i; -8i)\}$ ***b)*** $\{(3i; -18i)\}$

7.123 ***a)*** $-4i = (4; 270°) = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = 4 \cdot (\cos(270°) + i \cdot \sin(270°)) = 4\,\underline{/270°}$

b) $(4; 320°) = 4 \cdot (\cos(320°) + i \cdot \sin(320°)) = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{16\pi}{9}} = 3{,}064... - 2{,}571...i = 4\,\underline{/320°}$

c) $14 \cdot (\cos(29°) + i \cdot \sin(29°)) = (14; 29°) = 14 \cdot e^{i \cdot \frac{29\pi}{180}} = 12{,}244... + 6{,}787...i = 14\,\underline{/29°}$

d) $0{,}81 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} = 0{,}81 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°)) = (0{,}81; 30°) = 0{,}701... + 0{,}405i = 0{,}81\,\underline{/30°}$

Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

7.124 ***a)*** $3 + 3i$ ***b)*** $5 - 7i$ ***c)*** $3 - 7i$ ***d)*** $-5 - 7i$

7.125 ***a)*** $7{,}566... - 1{,}071...i = 7{,}641...\,\underline{/351{,}938...°}$ ***c)*** $0{,}421... + 0{,}538...i = 0{,}684...\,\underline{/51{,}947...°}$

b) $21{,}675... + 9{,}902...i = 23{,}830...\,\underline{/24{,}552...°}$

7.126 $2 - 5i$
Erweitern des Bruchs mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners $(-4 - 3i)$ ergibt $\frac{50 - 125i}{25}$.
Division durch 25 ergibt das Ergebnis.

7.127 – 7.138

7.127 ***a)*** i, $Re(z) = 0$, $Im(z) = 1$
b) 1, $Re(z) = 1$, $Im(z) = 0$
c) $32i$, $Re(z) = 0$, $Im(z) = 32$
d) $-\frac{1}{27}i$, $Re(z) = 0$, $Im(z) = -\frac{1}{27}$
e) -1, $Re(z) = -1$, $Im(z) = 0$

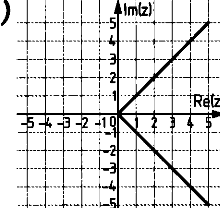
7.128 ***a)*** $\{11 - 8i, 11 + 8i\}$
b) $\{-2 - 9i, -2 + 9i\}$
c) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$
d) $\left\{-\frac{1}{3} - \frac{7}{3}i, -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}i\right\}$
e) $\left\{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}i, \frac{4}{3} + \frac{3}{4}i\right\}$
f) $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

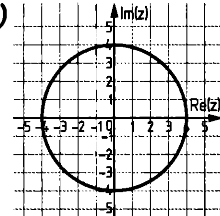
7.129 ***a)*** $z_1 = 2{,}702... + 1{,}301...i$
$z_2 = 0{,}667... + 2{,}924...i$
$z_3 = -1{,}870... + 2{,}345...i$
$z_4 = -3$
$z_5 = -1{,}870... - 2{,}345...i$
$z_6 = 0{,}667... - 2{,}924...i$
$z_7 = 2{,}702... - 1{,}301...i$

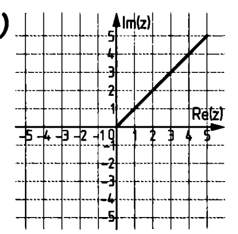
b) $z_1 = 6{,}786... + 3{,}193...i$
$z_2 = -6{,}158... + 4{,}280...i$
$z_3 = -0{,}627... - 7{,}473...i$

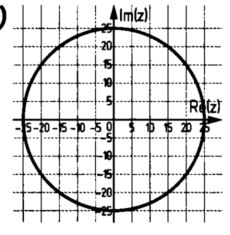
c) $z_1 = 3{,}244... + 0{,}767...i$
$z_2 = -0{,}767... + 3{,}244...i$
$z_3 = -3{,}244... - 0{,}767...i$
$z_4 = 0{,}767... - 3{,}244...i$



7.130 ***a)***


b)


c)


d)


7.131 ***a)*** $\{1{,}565... + 6{,}603...i, 2{,}434... - 2{,}603...i\}$ ***b)*** $\{-8{,}357... + 16{,}786...i, -0{,}142... - 0{,}286...i\}$
Auf die grafische Darstellung der Lösungen wird verzichtet.

7.132 Wegen des Satzes von Vieta gilt $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - (a + bi)) \cdot (x - (a - bi)) =$
$= x^2 - x \cdot (a + bi) - x \cdot (a - bi) + (a + bi) \cdot (a - bi) = x^2 - (a + bi + a - bi) \cdot x + a^2 + b^2 =$
$= x^2 - 2a \cdot x + a^2 + b^2$ und daher $p = -2a$ bzw. $q = a^2 + b^2$.

7.133 $x_2 = 1 - i$, $q = 2$

7.134 ***a)*** $\{2, 2i, -2i\}$ ***b)*** $\left\{-3, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

7.135 ***a)*** Für $z = a + bi$ gilt: LS: $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$, RS: $(Re(z))^2 + (Im(z))^2 = a^2 + b^2$, LS = RS.
b) Für $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ gilt: LS: $\arg\left(\frac{z}{z^*}\right) = \arg\left(\frac{r \cdot e^{i \cdot \varphi}}{r \cdot e^{-i \cdot \varphi}}\right) = \arg(1 \cdot e^{i \cdot \varphi - (-i \cdot \varphi)}) = \arg(e^{i \cdot 2\varphi}) = 2\varphi$,
RS: $2 \cdot \arg(z) = 2 \cdot \arg(r \cdot e^{i \cdot \varphi}) = 2 \cdot \varphi$, LS = RS.

7.136 Voraussetzung: $z^3 = 1 \Rightarrow$ Lösungen $1, z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
a) $LS = \left(1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}i = -1 = RS$
b) $LS = \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2 \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 = RS$
c) $LS = i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = i \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\sqrt{3} = RS$

7.137 $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) + (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = 2 \cdot (a_1 a_2 + b_1 b_2)$

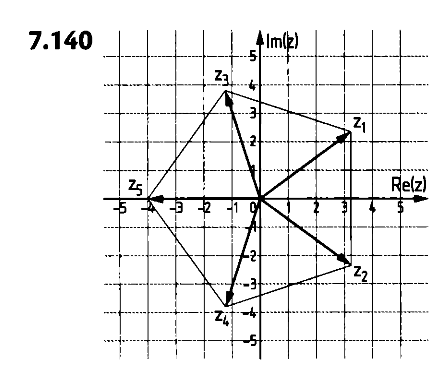
7.138 $LS = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)) =$
$= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)) + i \cdot (\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2))] =$
$= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = RS$

7.139 Die Wurzeln $z = \sqrt[3]{(r; \varphi)}$ sind $z_1 = \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3}\right)$, $z_2 = \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3} + 120°\right)$ und $z_3 = \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3} + 240°\right)$.

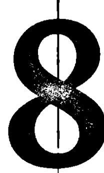
$w \cdot z_1 = (-0{,}5 + 0{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot i) \cdot \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3}\right) = (1; 120°) \cdot \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3}\right) = \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3} + 120°\right) = z_2$

$w^2 \cdot z_1 = (1; 120°)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3}\right) = (1; 240°) \cdot \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3}\right) = \left(\sqrt[3]{r}; \frac{\varphi}{3} + 240°\right) = z_3$

7.140



TE ergibt die Lösungen $z_1 = (4; 36°)$, $z_2 = (4; -36°)$, $z_3 = (4; 108°)$, $z_4 = (4; -108°)$ und $z_5 = (4; 180°)$.
Diese müssen ein regelmäßiges Fünfeck bilden, da der Betrag jeweils 4 ist und der Winkel jeweils um 72° größer wird.



Vektoren

8.1 *1)* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{GF}| = 3{,}162...$, $|\overrightarrow{FE}| = 2{,}061...$, $|\overrightarrow{EA}| = 4{,}123...$

Gesamtlänge der Deichsel: 9,346...

3) $\overrightarrow{DO} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$; A(−7|−1), B(−4|−3,5), C(−2|3), D(0|0), E(−11|−2), F(−13|−1,5), G(−16|−2,5)

8.2 *a)* $M_{AB}(0{,}25|-1)$, $M_{BC}(5{,}5|-1{,}5)$, $M_{CD}(1{,}5|4)$, $M_{AD}(-3{,}75|4{,}5)$

Wegen $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 5{,}25 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ sind die gegenüberliegenden Seiten $M_{AB}M_{BC}$ und $M_{AD}M_{CD}$ gleich lang und parallel.

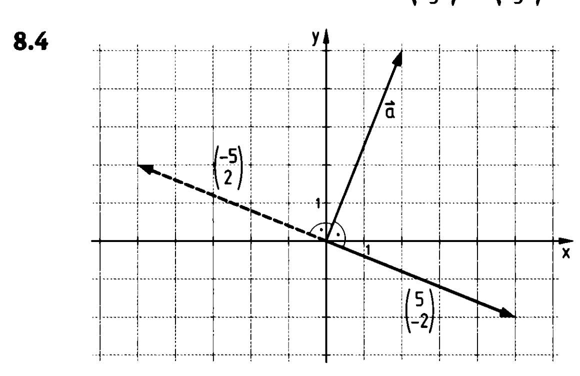
b) $M_{AB}(7|5)$, $M_{BC}(7|2)$, $M_{CD}(4|4)$, $M_{AD}(4|7)$

Wegen $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ sind die gegenüberliegenden Seiten $M_{AB}M_{BC}$ und $M_{AD}M_{CD}$ gleich lang und parallel.

8.3 *a) 1)* $S\left(\frac{2}{3}\middle|-1\right)$; $2 \cdot \overrightarrow{M_{AB}S} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{SC}$ *2)* $w_\alpha = \begin{pmatrix} -1{,}312... \\ -0{,}661... \end{pmatrix}$

b) 1) $S\left(-\frac{8}{3}\middle|\frac{8}{3}\right)$; $2 \cdot \overrightarrow{M_{AB}S} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \overrightarrow{SC}$ *2)* $w_\alpha = \begin{pmatrix} 0{,}573... \\ 1{,}819... \end{pmatrix}$

8.4



Die Koordinaten des ursprünglichen Vektors werden vertauscht und ein Vorzeichen wird geändert.

8.5 *a)* Rechtsdrehung. Das Vorzeichen des ursprünglichen x-Werts wurde geändert.
b) und *c)* Linksdrehung. Das Vorzeichen des ursprünglichen y-Werts wurde geändert.

8.6 *a)* $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

8.7 A(3|5) bzw. A(5|−9)

8.8 C(5|10) und D(1|8) bzw. C(9|2) und D(5|0)

8.9 *a)* B(−13,5|−10), D(10,5|8) *b)* B(−3,5|−2,5), D(0,5|0,5)

8.10 Im gleichseitigen Dreieck. Der einer Seite gegenüberliegende Eckpunkt liegt jeweils auf der Streckensymmetrale der Seite.

8.11 Beide Bewegungsabläufe benötigen die gleiche Muskelkraft. Der Angriffspunkt der Kraft wirkt sich auf die Größe der benötigten Kraft nicht aus.

8.15 ***a)*** 4 ***b)*** −57 ***c)*** −44

8.16 ***1)*** LS: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\,039$, RS: $\vec{b} \cdot \vec{a} = -2\,039$, LS = RS. Die Aussage ist richtig.
2) LS: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -2\,368$, RS: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -189$, LS ≠ RS. Die Aussage ist falsch.

8.17 ***a)*** 59,489...° ***b)*** 102,022...°

8.18 ***a)*** Die beiden Vektoren stehen normal aufeinander. Zu den zwei Berechnungsarten siehe Buch, Seite 217, Aufgabe 8.12.
b) Die beiden Vektoren stehen nicht normal aufeinander.

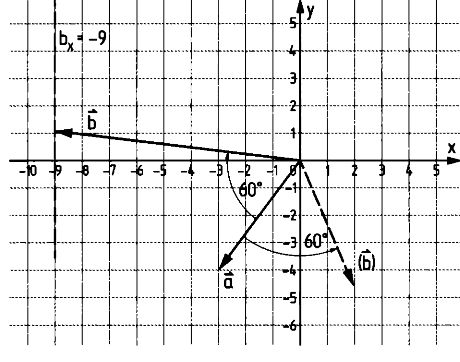
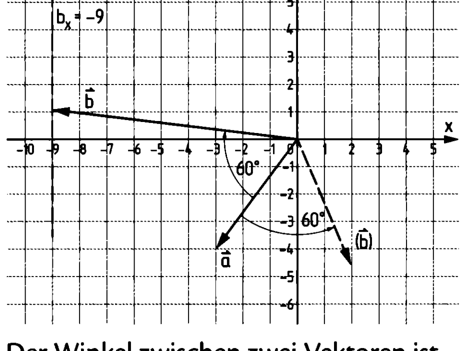
8.19 ***a)*** ***1)*** $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***2)*** $-11 \cdot \vec{e_1} - 2 \cdot \vec{e_2}$ ***c)*** ***1)*** $\begin{pmatrix} 0 \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - x_A \\ 0 \end{pmatrix}$ ***2)*** $(1 - x_A) \cdot \vec{e_1} + y_B \cdot \vec{e_2}$

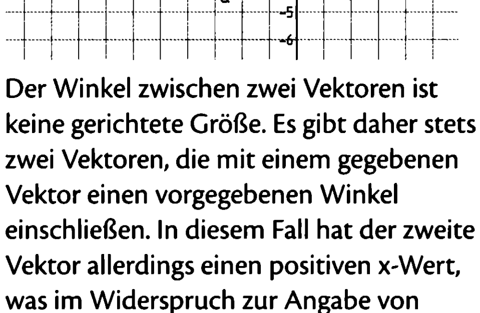
b) ***1)*** $\begin{pmatrix} 0 \\ 37 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 59 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***2)*** $59 \cdot \vec{e_1} + 37 \cdot \vec{e_2}$

8.20 ***a)*** $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ -30 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -20 \end{pmatrix}$ ***b)*** $a_x = -\frac{2}{3}$

8.21 ***a)*** 123,690...°; 82,874...°; 93,945...°; 59,489...° ***b)*** 120,018...°; 51,009...°; 77,471...°; 111,501...°

8.22 ***a)*** $b_y = 1{,}084...$; eine Lösung

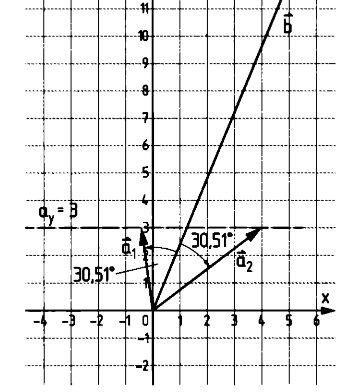





Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist keine gerichtete Größe. Es gibt daher stets zwei Vektoren, die mit einem gegebenen Vektor einen vorgegebenen Winkel einschließen. In diesem Fall hat der zweite Vektor allerdings einen positiven x-Wert, was im Widerspruch zur Angabe von $b_x = -9$ steht.

b) $a_x = -0{,}415...$ bzw. $a_x = 3{,}999...$

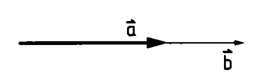




Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist keine gerichtete Größe. Es gibt daher stets zwei Vektoren, die mit einem gegebenen Vektor einen vorgegebenen Winkel einschließen.

8.23 Schließen zwei Vektoren einen spitzen Winkel ein, so ist ihr Skalarprodukt positiv, schließen sie einen stumpfen Winkel ein, so ist es negativ.
Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$. $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ sind die Längen der beiden Vektoren und daher positiv.
Für $0° < \varphi < 90°$ (= spitzer Winkel) ist $\cos(\varphi) > 0$ und daher $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$. Für $90° < \varphi < 180°$ (= stumpfer Winkel) ist $\cos(\varphi) < 0$ und daher $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

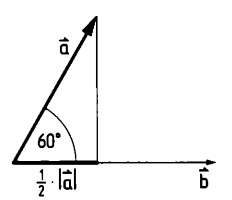
8.24 ***1)*** 0° Die Länge der Projektion ist gleich dem Betrag, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren null ist.



2) 180° Die Länge der Projektion ist gleich dem negativen Betrag, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren 180° ist.



3) 60° Die Länge der Projektion ist gleich dem halben Betrag, wenn der Winkel 60° ist.



8.25 Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ ändert sich das Skalarprodukt mit dem Cosinus des Winkels. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ hat höchstens den Wert 6 ($\varphi = 0° \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot 1$) und mindestens den Wert (-6) ($\varphi = 180° \Rightarrow \cos(\varphi) = -1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot (-1)$).

8.26 ***a)*** 1 522 500 Nm ***b)*** 7 875 000 Nm ***c)*** 30 000 000 Nm

8.27 ***a)*** 64 689,476... Nm ***b)*** 107 278,084... Nm

8.28 $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi)$

1) Richtig. $|\vec{F}| \cdot |2\vec{s}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{F}| \cdot 2 \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi) = 2 \cdot W$

2) Falsch. $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(2\varphi) \neq |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot 2 \cdot \cos(\varphi) = 2 \cdot W$

3) Richtig. Wird Arbeit entlang eines bestimmten Wegs s verrichtet und ist die Wirkungslinie der Kraft F in einem konstanten Winkel φ ($0° \leqslant \varphi < 90°$) zur Bewegungsrichtung geneigt, hat die Gleichung die Form $W = |\vec{F}| \cdot k$ mit $k = \cos(\varphi) \cdot |\vec{s}|$. Dann sind W und $|\vec{F}|$ zueinander direkt proportionale Größen.

8.29 ***a)*** 20 049,999... Nm ***b)*** 226 237,379... Nm

8.30 53,130...°

8.31 ***1)*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0°) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2$

3) $s \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = s \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)) = (s \cdot |\vec{a}|) \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |s \cdot \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = (s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$

8.32 Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt einen Skalar, also eine Zahl. Die Multiplikation mit einem weiteren Vektor ergibt einen Vektor und keinen Skalar.

8.33 ***a)*** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AB}^2$, da das Skalarprodukt $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ gilt, erhält man: $|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$

b) Ist $M(0|0)$ der Mittelpunkt eines Thaleskreises mit Radius r, dann sind $A(-r|0)$ und $B(r|0)$ die Schnittpunkte des Halbkreises mit der x-Achse. Setzt man $\overrightarrow{MA} = -\vec{r}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{r}$ und $\overrightarrow{MP} = \vec{p}$ (P ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis), so gilt: $\overrightarrow{AP} = \vec{p} + \vec{r}$; $\overrightarrow{BP} = \vec{p} - \vec{r}$.
Multipliziert man die beiden Vektoren, erhält man:
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (\vec{p} + \vec{r}) \cdot (\vec{p} - \vec{r}) = \vec{p}^2 - \vec{r}^2 = |\vec{p}|^2 - |\vec{r}|^2$. Die Länge des Vektors $\vec{p}$ ist gleich groß wie jene des Vektors $\vec{r}$ und somit ist das Ergebnis null. $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{BP}$ sind daher orthogonal.

c) Es seien $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$. Dann gilt: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$, das Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ einsetzen ergibt:
$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

8.34 $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|\overrightarrow{DF}|} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = -\frac{3}{5}$, $\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{FD}|\cdot|\overrightarrow{GB}|} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$

Der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CH}$ und $\overrightarrow{DF}$ und der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{FD}$ und $\overrightarrow{GB}$ sind verschieden. Das Achteck hat daher zwei verschiedene Innenwinkel und ist nicht regelmäßig.

8.35 ***a)*** $119\ E^2$ ***b)*** $25{,}5\ E^2$

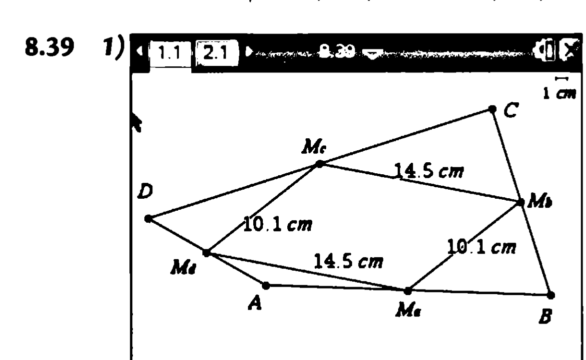
1. Art: Siehe Formel im Buch, Seite 218,
2. Art: Heron'sche Flächenformel,
3. Art: Trigonometrische Flächenformel

8.36 ***a)*** $6\ E^2$ ***b)*** $120\ E^2$

8.37 ***a)*** $S\left(1\middle|\frac{8}{3}\right)$, $A_{ABS} = A_{BCS} = A_{ACS} = \frac{28}{3}\ E^2$ ***b)*** $S(3|-2)$, $A_{ABS} = A_{BCS} = A_{ACS} = 8\ E^2$

8.38 $A = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)\cdot(b_x^2 + b_y^2) - (a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y)^2}$ Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man: $\sqrt{a_x^2\cdot b_y^2 + a_y^2\cdot b_x^2 - 2a_xa_yb_xb_y} = \sqrt{(a_xb_y - a_yb_x)^2} = |a_xb_y - a_yb_x|$

8.39 ***1)***



2) $\overrightarrow{OM_a} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OM_b} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$,

$\vec{u} = M_b - M_a = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$

$= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

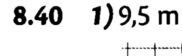
$\overrightarrow{OM_c} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OM_d} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$,

$\vec{v} = M_c - M_d = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) =$

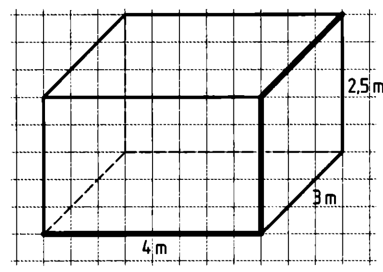
$= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) =$

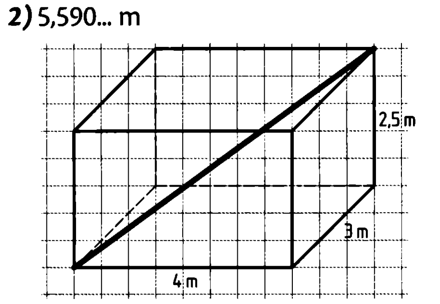
$= \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

3) $5{,}875\ E^2$



8.40 ***1)*** 9,5 m ***2)*** 5,590... m





8.43 ***1)*** Falsch. $\overrightarrow{AE} \nparallel \overrightarrow{CD}$ ***4)*** Richtig. ***6)*** Richtig.
2) Falsch. $\overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{DA}$ ***5)*** Richtig.
3) Falsch. $\overrightarrow{HB}$ ist die Raumdiagonale, $\overrightarrow{AC}$ eine Seitendiagonale

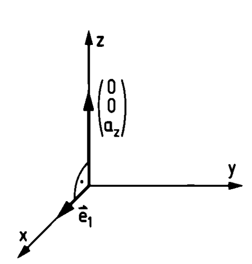
8.44 ***a)*** $\begin{pmatrix}8\\-8\\-6\end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix}-26\\7\\-21\end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix}-13\\-13\\-3\end{pmatrix}$

8.45 ***a)*** 100,384...° ***b)*** 89,455...° ***c)*** 121,992...°

8.46 ***a)*** −3 ***b)*** 2 ***c)*** 1

8.47 90°

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$



Das Skalarprodukt ist null. Die beiden Vektoren stehen daher normal aufeinander.

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix}$ hat die Richtung der z-Achse, der Vektor $\vec{e_1}$ hat die Richtung der x-Achse. Die x- und die z-Achse stehen normal aufeinander.

8.48 ***1)*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$
2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HD}$
3) $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HD}$
4) $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{HD}$

8.49 ***a) 1)*** $\sqrt{5}$ ***2)*** (0,894..., 0, 0,447...)
b) 1) $\sqrt{89}$ ***2)*** (−0,211..., 0,741..., 0,635...)
c) 1) $\sqrt{667}$ ***2)*** (0,038..., −0,813..., −0,580...)

8.50 ***a)*** S(−4|0|3) ***b)*** S(4|2|−1)

8.51 ***1)*** (4, 5, 8), 10,246... E ***2)*** 25,612... E^2

8.52 ***a)*** (14|12|−1) ***b)*** (17|1|−27)

8.53 $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ stehen normal auf den Vektor $\vec{a}$.
Alle Vektoren, die in einer Normalebene des Vektors $\vec{a}$ liegen, stehen normal auf $\vec{a}$.

8.54 ***1)*** B(17,7 m|17,7 m|0 m), C(−17,7 m|17,7 m|0 m), D(−17,7 m|−17,7 m|0 m), S(0|0|21,7 m)
2) 3 235,787... m^2
3) 50,796...°

8.55 ***a)*** 55,890...° bzw. 124,109...° ***b)*** 48,852...° bzw. 131,147...°

8.56 ***a)*** u = 66,020... E, A = 115,187... E^2, $S\left(\frac{16}{3}\middle|\frac{-20}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$
b) u = 73,028... E, A = 251,290... E^2, $S\left(2\middle|\frac{14}{3}\middle|-10\right)$

8.57 ***a)*** Eckpunkte: A(0 cm|0 cm|0 cm), B(12 cm|0 cm|0 cm), C(12 cm|12 cm|0 cm), D(0 cm|12 cm|0 cm), E(0 cm|0 cm|12 cm), F(12 cm|0 cm|12 cm), G(12 cm|12 cm|12 cm), H(0 cm|12 cm|12 cm); Mittelpunkte der Seitenflächen: (6 cm|6 cm|0 cm), (6 cm|6 cm|12 cm), (6 cm|0 cm|6 cm), (12 cm|6 cm|6 cm), (6 cm|12 cm|6 cm), (0 cm|6 cm|6 cm); Mittelpunkt des Würfels: (6 cm|6 cm|6 cm)

b) Eckpunkte: A(0 cm|0 cm|0 cm), B(−5 cm|0 cm|0 cm), C(−5 cm|−5 cm|0 cm), D(0 cm|−5 cm|0 cm), E(0 cm|0 cm|−5 cm), F(−5 cm|0 cm|−5 cm), G(−5 cm|−5 cm|−5 cm), H(0 cm|−5 cm|−5 cm); Mittelpunkte der Seitenflächen: (−2,5 cm|−2,5 cm|0 cm), (−2,5 cm|−2,5 cm|−5 cm); (0 cm|−2,5 cm|−2,5 cm), (−2,5 cm|0 cm|−2,5 cm), (−5 cm|−2,5 cm|−2,5 cm), (−2,5 cm|−5 cm|−2,5 cm); Mittelpunkt des Würfels: (−2,5 cm|−2,5 cm|−2,5 cm)

8.58 ***a)*** 3,366... ***b)*** 7,537... ***c)*** 2,848...

8.59 ***1)*** J(0|320|255), H(40|320|180)
2) 85 cm; 28,072...°
3) K(0|120|158,$\dot{6}$)

8.60 ***a) 1)*** $\vec{a} = M_{BC} - M_{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = M_{CD} - M_{BC} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -3 \\ 3,5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = M_{AD} - M_{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\vec{d} = M_{AB} - M_{AD} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3 \\ -3,5 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = -1 \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{d} = -1 \cdot \vec{b}$, gegenüberliegende Seiten sind parallel.

$|\vec{a}| = \sqrt{10,25} = |\vec{c}|$ bzw. $|\vec{b}| = \sqrt{10,25} = |\vec{d}|$, gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
Das durch die Seitenmittelpunkte festgelegte Viereck ist daher ein Parallelogramm.

2) –

b) 1) $\vec{a} = M_{BC} - M_{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = M_{CD} - M_{BC} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = M_{AD} - M_{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$,

$\vec{d} = M_{AB} - M_{AD} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = -1 \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{d} = -1 \cdot \vec{b}$, gegenüberliegende Seiten sind parallel.

$|\vec{a}| = \sqrt{1,5} = |\vec{c}|$ bzw. $|\vec{b}| = \sqrt{19,25} = |\vec{d}|$, gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
Das durch die Seitenmittelpunkte festgelegte Viereck ist daher ein Parallelogramm.

2) –

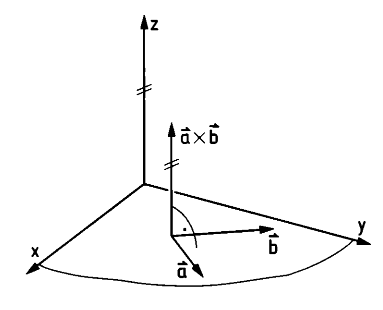
8.61 ***1)*** $M = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{M_{AC}} + \overrightarrow{M_{BD}}) = (-0,25|-0,25|1,5) = \frac{1}{4} \cdot (A + B + C + D)$
2) $M = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{M_{AC}} + \overrightarrow{M_{BD}}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (A + C) + \frac{1}{2} \cdot (B + D)\right) = \frac{1}{4} \cdot (A + B + C + D)$

8.62 ***1)*** Es erfordert weniger Kraft, den Schraubenschlüssel so wie in der Abbildung zu halten.
2) Bei einem Rechtsgewinde bewegt sich die Mutter bei Drehung im Uhrzeigersinn nach unten, bei Drehung gegen den Uhrzeigersinn nach oben. Bei einem Linksgewinde bewegt sich die Mutter bei Drehung im Uhrzeigersinn nach oben, bei Drehung gegen den Uhrzeigersinn nach unten.

8.64 $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \sin(\gamma)$

8.68 $\vec{a} \times \vec{b}$ ist $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ lang und hat die Richtung der negativen z-Achse.

8.69



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_z \end{pmatrix}$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen in der xy-Ebene. Die von den beiden Vektoren aufgespannte Ebene ist die xy-Ebene. Der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal stehende Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht daher wie die z-Achse normal zur xy-Ebene. $\vec{c}$ ist somit parallel zur z-Achse.

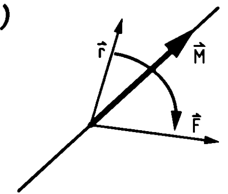
8.70 ***1)*** Wegen $\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\\-a_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_y \cdot b_z - (-a_z) \cdot b_y\\-a_z \cdot b_x - (-a_x) \cdot b_z\\-a_x \cdot b_y - (-a_y) \cdot b_x\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\\a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\\a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\end{pmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ ändert sich das Vorzeichen von $\vec{a} \times \vec{b}$.

2) Wegen $\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-b_x\\-b_y\\-b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_y \cdot (-b_z) - a_z \cdot (-b_y)\\a_z \cdot (-b_x) - a_x \cdot (-b_z)\\a_x \cdot (-b_y) - a_y \cdot (-b_x)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\\a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\\a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\end{pmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ ändert sich das Vorzeichen von $\vec{a} \times \vec{b}$.

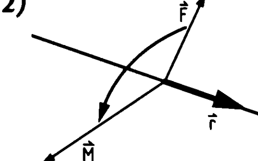
3) Wegen $\begin{pmatrix}-a_x\\-a_y\\-a_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-b_x\\-b_y\\-b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_y \cdot (-b_z) - (-a_z) \cdot (-b_y)\\-a_z \cdot (-b_x) - (-a_x) \cdot (-b_z)\\-a_x \cdot (-b_y) - (-a_y) \cdot (-b_x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\\a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\\a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$ ändert sich das Vorzeichen von $\vec{a} \times \vec{b}$ nicht.

8.71 $\overrightarrow{M_1}$ und $\overrightarrow{M_2}$ haben einander entgegengesetzte Richtung.

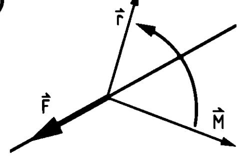
8.72 ***1)***



2)



3)



8.73 ***a)*** $\begin{pmatrix}-175\\101\\-75\end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix}-234\\48\\-156\end{pmatrix}$

8.74 ***a)*** 179,791... E ***b)*** 238,243... E

8.75 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix}-86\\-438\\211\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}152\\-46\\120\end{pmatrix} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Die Ergebnisse sind verschieden. Das Assoziativgesetz gilt für das Vektorprodukt nicht.

8.76 ***a)*** 48,093... E^2 ***b)*** 38,183... E^2 ***c)*** 11,532... E^2

8.77 ***a)*** 15,443... E^2 ***b)*** 38,652... E^2 ***c)*** 3,354... E^2

8.78 ***a)*** 526 E^3 ***b)*** 855 E^3

8.79 ***a)*** 6 E^3 ***b)*** $198,\dot{3}$ E^3

8.80 ***1)*** A(0|0|0), B(a|0|0), C(a|b|0), D(0|b|0), E(0|0|h), F(a|0|h), G(a|b|h), H(0|b|h)

2) $V = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}|$

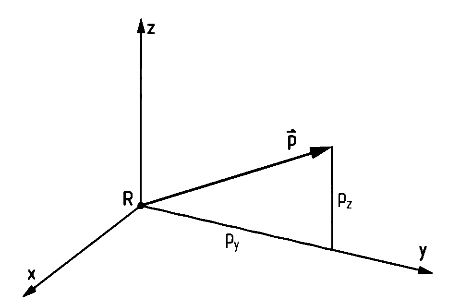
$V = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}| = \left|\left(\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\a \cdot b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}\right| = |0 + 0 + a \cdot b \cdot h| = a \cdot b \cdot h$

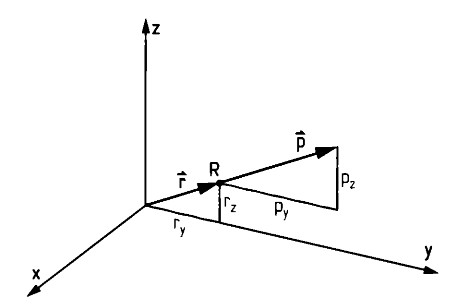
8.81 ***a)*** (−195; −181; −368) Nm ***b)*** (268; 65; 217) Nm

8.82 (−0,018; 0,007 2; 0,014) Nm

8.83 r_x und r_z

8.84





Aus $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y p_z - r_z p_y \\ -r_x p_z \\ r_x p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Gleichungen (1) $r_y p_z - r_z p_y = 0$ und (2) $-r_x p_z = 0$. Umformen von (1) ergibt $r_y p_z = r_z p_y$. Für $p_y \neq 0$ und $p_z \neq 0$ muss daher $r_y = r_z = 0$ oder $r_z = \frac{p_z}{p_y} \cdot r_y$ gelten. Für $p_z \neq 0$ ist Gleichung (2) nur erfüllt, wenn $r_x = 0$ ist. Die Koordinaten von R lauten daher $R(0|0|0)$ oder $R\left(0 \middle| r_y \middle| \frac{p_z}{p_y} \cdot r_y\right)$.

8.85 (−1 140; 480; 855) Nm

8.86 ***1)*** $\vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y a_z - a_y a_z \\ a_x a_z - a_x a_z \\ a_x a_y - a_x a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Für den Betrag des Vektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{a}$ gilt: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(0°) = 0$. Nur für $\vec{c} = (0, 0, 0)$ gilt $|\vec{c}| = 0$ und daher ist $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$.

8.87 ***1)*** LS: $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (c_y a_z - c_z a_y) \cdot b_x - (c_x a_z - c_z a_x) \cdot b_y + (c_x a_y - c_y a_x) \cdot b_z =$
$= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x$

RS: $-(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -[(b_y a_z - a_y b_z) \cdot c_x - (b_x a_z - a_x b_z) \cdot c_y + (b_x a_y - b_y a_x) \cdot c_z] =$
$= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y - a_y b_x c_z + a_y b_z c_x + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x$

LS = RS

2) LS: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot (c_x + d_x) - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot (c_y + d_y) + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot$
$\cdot (c_z + d_z) = a_x b_y c_z + a_x b_y d_z - a_x b_z c_y - a_x b_z d_y - a_y b_x c_z - a_y b_x d_z + a_y b_z c_x + a_y b_z d_x +$
$+ a_z b_x c_y + a_z b_x d_y - a_z b_y c_x - a_z b_y d_x$

RS: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot c_x - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot c_y + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot c_z +$
$+ (a_y b_z - a_z b_y) \cdot d_x - (a_x b_z - a_z b_x) \cdot d_y + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot d_z = a_x b_y c_z + a_x b_y d_z - a_x b_z c_y -$
$- a_x b_z d_y - a_y b_x c_z - a_y b_x d_z + a_y b_z c_x + a_y b_z d_x + a_z b_x c_y + a_z b_x d_y - a_z b_y c_x - a_z b_y d_x$

LS = RS

8.88

Für die Steigung der Geraden gilt $k = 1 = \frac{1}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Jeder Vektor $\vec{a} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt daher die Richtung der Geraden an.

8.92 ***a)*** $T_1(3|7)$, $T_2(19|-33)$ ***b)*** $T_1(-5|-4)$, $T_2\left(5\middle|-\frac{1}{4}\right)$

8.93 ***a)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ ***c)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -38 \\ 30 \end{pmatrix}$

8.94 *1)* g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

2) Um eine Gerade in Parameterform angeben zu können, muss ein Punkt A der Geraden und ein Vektor $\vec{a}$, der die Richtung der Geraden hat, bekannt sein. Durch Addition des mit einem Parameter t multiplizierten Vektors $\vec{a}$ zum Ortsvektor des Punkts A kann der Ortsvektor jedes Punkts P der Geraden angegeben werden.

ZB ergibt der Parameter t = 2 den Punkt P_1: $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Für P_2 muss t = –1 sein: $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} - 1 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

Mit t = –3 wird P_3 beschrieben: $\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OA} - 3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$.

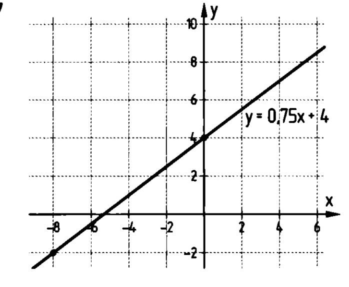
3) Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

8.95 *1)* Falsch. Auch parallele Geraden können durch gleiche Richtungsvektoren beschrieben werden.
2) Falsch. Auch parallele Geraden können durch verschiedene Richtungsvektoren beschrieben werden.
3) Falsch. Zwei Geraden mit parallelen Richtungsvektoren können auch ident sein.

8.96 *a)* g_1: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, g_2: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, S(28|–26)

b) g_1: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1,5\\-9\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, g_2: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$, S(–79,7|–29,3)

8.97



k = 0,75
Y(0|4)

Die Koordinaten a_x und a_y des Richtungsvektors $\vec{a}$ sind die Kathetenlängen Δx und Δy des Steigungsdreiecks.
(Für die gegebene Gerade ergeben die Koordinaten des Richtungsvektors $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ Kathetenlängen Δx = 4 und Δy = 3 des Steigungsdreiecks.)

8.99 *a)* 13x + 7y = –63 *b)* 6x + 27y = 186 *c)* 18x – 19y = 429

8.100 *a)* g: $\begin{pmatrix}13\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 135$ *b)* g: $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -11$ *c)* g: $\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 68$

8.101 *a)* g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}0\\-11\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ *b)* g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ *c)* g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2,5\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

8.102 Geraden parallel zur y-Achse können wie alle Geraden in Parameterform angegeben werden. Da einem x-Wert unendlich viele y-Werte zugeordnet sind, stellen y-parallele Geraden keine Funktionen dar und können daher nicht in der Form y = kx + d angegeben werden.
ZB ist $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ eine Parameterdarstellung der Geraden x = 4. Die Steigung k und der Ordinatenabschnitt d können nicht angegeben werden.

8.103 Umformen von ax + by = c ergibt $y = \frac{-a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$. Der Schnittpunkt $Y\left(0\middle|\frac{c}{b}\right)$ mit der y-Achse ist ein Punkt der Geraden, der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ gibt die Richtung der Geraden an. $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ ist eine Parameterdarstellung der Geraden.

8.104 Gerade durch AB: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 16{,}5 \end{pmatrix}$, Streckensymmetrale von CD: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 16{,}35 \\ 32{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5{,}4 \\ 27{,}7 \end{pmatrix}$
Schnittpunkt E(20,383...|12,011...)

8.105 Umformen der Gleichung I ergibt die Geradengleichung $y = \frac{-a_{11}}{a_{12}} \cdot x + \frac{b_1}{a_{12}}$ mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{pmatrix}$. Umformen von II ergibt $y = \frac{-a_{21}}{a_{22}} \cdot x + \frac{b_2}{a_{22}}$ mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix}$.
Wegen $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$ muss $a_{11} \cdot a_{22} = a_{21} \cdot a_{12}$ sein. Umformen und Multiplikation mit (−1) ergibt $\frac{a_{12}}{-a_{11}} = \frac{a_{22}}{-a_{21}}$. Zähler bzw. Nenner des Terms auf der linken Seite sind die Koordinaten des Richtungsvektors $\overrightarrow{a_1}$, Zähler bzw. Nenner des Terms auf der rechten Seite sind die Koordinaten von $\overrightarrow{a_2}$. Da die Quotienten der beiden Terme gleich sind, muss daher für die Richtungsvektoren $\overrightarrow{a_2} = t \cdot \overrightarrow{a_1}$ gelten. $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{a_2}$ sind parallel, die beiden Geraden daher parallel oder ident.

8.107 ***1)*** $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***2)*** $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***3)*** $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.108 ***a)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ***b)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix}$ ***c)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -11 \end{pmatrix}$

8.109 ***a)*** P(4|3|25) ***b)*** P(16,687 5|3,5|−14,375)

8.110 ***a)*** g_1 und g_2 sind zueinander windschief.
b) g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt S(38|−111|−36).

8.111 ***1)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 2{,}1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 13{,}9 \\ 21{,}9 \\ 5{,}8 \end{pmatrix}$ ***2)*** B(5,691...|5,395...|2,372...) ***3)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5{,}691... \\ 5{,}395... \\ 3{,}872... \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 21{,}9 \\ -13{,}9 \\ 0 \end{pmatrix}$

8.113 ***1)*** $\vec{n} = (3, -5, 8)$ ***2)*** $\vec{n} = (-1, 0, 1)$ ***3)*** $\vec{n} = (0, 1, 2)$

8.114 ***1)*** xy-Ebene: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, z = 0 ***3)*** yz-Ebene: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, x = 0

2) xz-Ebene: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y = 0

8.115 ***a) 1)*** ε: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***2)*** ε: 37x − 57y − 11z = 319

b) 1) ε: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 23 \\ 25 \\ 17 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -35 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -25 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***2)*** ε: 206x − 5y + 905z = 19 998

8.116 ***1)*** 2,228... dm ***2)*** 0,565... kg

8.117 ***a)*** 25; 72,012...° ***b)*** 9; 37,874...° ***c)*** 183; 10,525...°

8.118 ***a)*** −48; 137,787...° ***b)*** 21; 54,872...° ***c)*** −51; 134,181...°

8.119 ***a)*** g_1 und g_2 sind zueinander windschief. ***b)*** g_1 und g_2 sind zueinander windschief.

8.120 ***a)*** ($b_y = -1$ angenommen)
1) 32 E^2 ***2)*** 27,310... E ***3)*** $h_a = 8{,}875\ldots$ E, $h_b = 3{,}184\ldots$ E ***4)*** C(−3|0)
b) ***1)*** 85,170... E^2 ***2)*** 57,763... E ***3)*** $h_a = 5{,}183\ldots$ E, $h_b = 6{,}841\ldots$ E ***4)*** D(9|−14|14)

8.121 ***a)*** $\begin{pmatrix} -77 \\ -54 \\ 28 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} -36 \\ -76 \\ 8 \end{pmatrix}$

8.122 ***a)*** 567 E^3 ***b)*** 44 E^3

8.123 ***a)*** S(−2,068...|1,172...) ***b)*** S(−1,730...|−1,807...)

8.124 ***a)*** $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6$, $2x + 3y = 6$

b) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -37$, $x - 7y = -37$

c) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 15 \\ 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 16$, $15x + 19y = 16$

8.125 ***a)*** $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -27 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 23 \\ 96 \\ 187 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\,917$, $23x + 96y + 187z = 1\,917$

b) $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 77 \\ 2 \\ -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\,234$, $77x + 2y - 26z = 1\,234$

8.126 1. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich.
Die Berechnung ergibt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} a_y \cdot a_z - a_y \cdot a_z \\ a_x \cdot a_z - a_x \cdot a_z \\ a_x \cdot a_y - a_x \cdot a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Einer der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ oder beide Vektoren sind der Nullvektor.
ZB für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt die Berechnung $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \cdot b_z - 0 \cdot b_y \\ 0 \cdot b_x - 0 \cdot b_z \\ 0 \cdot b_y - 0 \cdot b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\vec{b}$ ist der Gegenvektor zu $\vec{a}$.
Die Berechnung ergibt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_y \cdot (-a_z) - (-a_y) \cdot a_z \\ (-a_x) \cdot a_z - a_x \cdot (-a_z) \\ a_x \cdot (-a_y) - (-a_x) \cdot a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.127 (15; −10; −24) Nm

8.128 ***1)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ***2)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***3)*** g: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.129 ***1)*** Das Skalarprodukt $\overrightarrow{{}_a n_L} \cdot \overrightarrow{{}_b n_L}$ ist gleich dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
Für das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$. Für das Skalarprodukt von
$\overrightarrow{{}_a n_L} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{{}_b n_L} = \begin{pmatrix} -b_y \\ b_x \end{pmatrix}$ gilt $\overrightarrow{{}_a n_L} \cdot \overrightarrow{{}_b n_L} = (-a_y) \cdot (-b_y) + a_x \cdot b_x = a_y \cdot b_y + a_x \cdot b_x = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

2) Der Betrag des Skalarprodukts $\overrightarrow{{}_a n_R} \cdot \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
Für den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gilt
$A_P = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x|$. Für den Betrag des Skalarprodukts von
$\overrightarrow{{}_a n_R} = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ gilt $|\overrightarrow{{}_a n_R} \cdot \vec{b}| = |a_y \cdot b_x + (-a_x) \cdot b_y| = |-a_x \cdot b_y + a_y \cdot b_x|$. Beide Terme sind bis auf die Vorzeichen gleich, ihre Beträge stimmen daher überein.

9 Matrizen und Determinanten

9.1 *1)* 3 · 3 Punkte + 1 · 1 Punkt + 2 · 0 Punkte = 10 Punkte
2) Sp. = S + U + N
3) In der Spalte „Tore" aus dem Verhältnis (:) eine Differenz (–) machen.

9.2 Es wird die Darstellung von individuell recherchierten Daten verlangt.

9.3 *a)* (2 × 3)-Matrix; $m_{23} = 2$, $m_{11} = -1$, $m_{13} = 7$, $m_{21} = 4$
b) (3 × 3)-Matrix, quadratische Matrix; $k_{32} = 0$, $k_{23} = 8$, $k_{12} = 12$, $k_{31} = 0$
c) (1 × 4)-Matrix, einzeilige Matrix; $f_{14} = -2$, $f_{12} = 1$, $f_{13} = 0$, $f_{11} = 3$
d) (3 × 4)-Matrix; $a_{33} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{21} = 1$

9.4 *a)* $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $N^T = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ -10 & 20 & -10 \end{pmatrix}$ *c)* $K^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$ *d)* $B^T = \begin{pmatrix} a & b & c & -c \\ 0 & 0 & 1 & -e \\ -b & 1 & e & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.5 *1)* zB $A = (1\ \ 3\ \ 1\ \ 1) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ein Spaltenvektor

2) zB $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, eine Einheitsmatrix

9.6 *1)* $M = \begin{pmatrix} 89 & 56 & 0 \\ 31 & 22 & 86 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 93 \\ 72 & 0 & 78 \end{pmatrix}$

2) $S = \begin{pmatrix} 96 & 74 & 93 \\ 103 & 22 & 164 \end{pmatrix}$

3) $V = \begin{pmatrix} 14 & 36 & 186 \\ 144 & 0 & 156 \end{pmatrix}$

4) P = (599,00 € 678,50 €); $(599{,}00\text{ €}\ \ 678{,}50\text{ €}) \cdot \begin{pmatrix} 96 & 74 & 93 \\ 103 & 22 & 164 \end{pmatrix} =$
= (599,00 € · 96 + 678,50 € · 103 599,00 € · 74 + 678,50 € · 22 599,00 € · 93 + 678,50 € · 164) =
= (127 389,50 € 59 253,00 € 166 981,00 €)

9.8 *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -23 & 24 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1{,}6 & -0{,}4 & 2{,}8 \\ -3 & -1{,}2 & 3{,}2 \\ 1 & 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$

9.9 *a)* $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -7 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \\ 2 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 29 & 8 & -1 \\ -6 & -4 & 11 \\ -2 & 3 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 0 & 10 & 15 \\ -7 & -13 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -3 & -4 \\ -6 & -14 & -4 \\ 5 & 16 & 12 \end{pmatrix}$

9.10 Anschreiben der Verkaufszahlen der Vertriebsfilialen A und B in Matrizenform ergibt
$A = \begin{pmatrix} 54 & 12 & 123 \\ 26 & 5 & 88 \\ 43 & 14 & 105 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 58 \\ 14 & 25 & 16 \\ 143 & 114 & 67 \end{pmatrix}$. In der Matrix A werden die Verkaufszahlen für die einzelnen Monate in den Zeilen dargestellt, in der Matrix B in den Spalten. Für die verkauften Produkte verhält es sich genau umgekehrt. Daher muss die Matrix B vor dem Addieren mit der Matrix A transponiert werden.
Die Verkaufszahlen der Vertriebsfiliale C sind doppelt so hoch wie in der Filiale A, daher gilt $C = 2 \cdot A$.
Berechnung der Summe $A + B^T + 2A = 3A + B^T = \begin{pmatrix} 193 & 50 & 512 \\ 112 & 40 & 378 \\ 187 & 58 & 382 \end{pmatrix}$ und Darstellung der Matrix in Tabellenform.

Gesamtverkaufszahlen	Flat-Screens	Sat-Receiver	USB-Sticks
Juni	193	50	512
Juli	112	40	378
August	187	58	382

9.11 ***a)*** $\begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 & 21 \\ -13 & -6 & -6 & 35 \\ -5 & 24 & 62 & -7 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 11 & 18 & -1 \\ -13 & 1 & 1 \\ -11 & -19 & 11 \\ -5 & 19 & -3 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 17 & 10 & -4 \\ 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 51 & -11 \\ 20 & -59 \\ 25 & -2 \end{pmatrix}$

9.12 ***1), 3), 4)*** und ***5)*** Die Spaltenanzahl der linken Matrix entspricht der Zeilenanzahl der rechten. Die Multiplikation ist daher durchführbar.
1) $F \cdot G = \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ ***3)*** $G \cdot H = \begin{pmatrix} 22 & -35 & -1 \\ 52 & 10 & 78 \\ 18 & -15 & 11 \end{pmatrix}$ ***4)*** $H \cdot G = \begin{pmatrix} 41 & -53 \\ 66 & 2 \end{pmatrix}$ ***5)*** $G \cdot F = \begin{pmatrix} 27 & -16 & 1 \\ 2 & 24 & -10 \\ 13 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
2) Die Matrix F hat drei Spalten, die Matrix H zwei Zeilen. Die beiden Anzahlen stimmen nicht überein. Die Multiplikation ist nicht durchführbar.
6) Die Matrix H hat drei Spalten, die Matrix F zwei Zeilen. Die beiden Anzahlen stimmen nicht überein. Die Multiplikation ist nicht durchführbar.

9.13 ***a)*** $(a \ \ b) \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix} = (a \cdot d + b \cdot f \quad a \cdot e + b \cdot g)$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix}$

9.14 $B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -16 \\ 1 & -9 & 2 \\ 8 & -18 & -10 \end{pmatrix}$; $A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 12 & 4 \\ 1 & -6 & -6 \\ -8 & 12 & 2 \end{pmatrix}$
$E \cdot A = A \cdot E = A$
Die Ergebnisse der linksseitigen Multiplikation und der rechtsseitigen Multiplikation der Matrix A mit der Matrix B sind verschieden. Die Ergebnisse der linksseitigen Multiplikation und der rechtsseitigen Multiplikation der Matrix A mit der Einheitsmatrix sind ident.
Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

9.15 $L = \{(-13, 7)\}$

9.16 ***a)*** –52 ***b)*** –124 ***c)*** –87 ***d)*** –64

9.17 ***1)*** –18 Nur das Produkt $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$ ist verschieden null.
2) Die Determinante einer Matrix in Dreiecksform ist das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale.

9.18 – 9.29

9.18 ***1)*** $\det(A_1) = -8$, $\det(A_2) = 8$

Werden zwei Spalten einer Matrix vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

2) $\det(A_2) = 8$, $\det(A_3) = -16$

Wird eine Zeile einer Matrix mit einer Konstante k multipliziert, so ist die Determinante der neuen Matrix das k-fache der ursprünglichen Determinante.

3) $\det(A_3) = -16$, $\det(A_4) = -16$

Wird zu einer Zeile einer Matrix eine andere Zeile derselben Matrix addiert, so bleibt die Determinante gleich.

9.21 ***1)*** 1, −2, 3, −4

2) Die Determinante einer (n × n)-Matrix angegebener Bauart hat den Wert $(-1)^{n+1} \cdot n$.

−10

9.22 ***a)*** $a_{21} = -\frac{74}{21}$ ***b)*** $b_{32} = \frac{17}{8}$ ***c)*** $c_{13} = \frac{51}{6}$

9.23 ***1)*** Die Determinante ist null, da die dritte Spalte das (−2)-fache der ersten Spalte ist.

2) Die Determinante ist null, da in der dritten Spalte und in der dritten Zeile alle Elemente null sind.

3) Die Determinante ist ungleich null, da keine der im Buch auf Seite 246 angegebenen Eigenschaften erfüllt ist.

4) Die Determinante ist null, da die erste und die dritte Spalte gleich sind.

9.25 ***a)*** $\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

9.26 ***a)*** $\begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} \frac{31}{92} & -\frac{17}{92} & -\frac{9}{92} & -\frac{59}{92} \\ \frac{13}{184} & -\frac{19}{184} & \frac{17}{184} & -\frac{1}{184} \\ -\frac{3}{92} & -\frac{31}{92} & -\frac{11}{92} & -\frac{21}{92} \\ \frac{35}{184} & -\frac{37}{184} & -\frac{25}{184} & -\frac{31}{184} \end{pmatrix}$

9.27 ***a)*** $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

9.28 ***a)*** $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

9.29 Es gilt: $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufstellen der relevanten Gleichungen für die Variablen f und h ergibt das Gleichungssystem I: $af + bh = 0$, II: $cf + dh = 1$. Eliminieren der Variable h ergibt die Gleichung $adf - bcf = -b$. Umformen ergibt $f = -\frac{b}{ad - bc}$ und wegen $\det(A) = ad - bc$ gilt daher $f = -\frac{b}{\det(A)}$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $h = \frac{a}{\det(A)}$.

9.30 ***1)*** $A \cdot A^{-1} = E$ führt für die Elemente der ersten Spalte der Matrix A^{-1} auf

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{ei - fh}{\det(A)} \\ \frac{fg - di}{\det(A)} \\ \frac{dh - eg}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\text{I: } a \cdot \frac{ei - fh}{\det(A)} + b \cdot \frac{fg - di}{\det(A)} + c \cdot \frac{dh - eg}{\det(A)} = 1$$

$$\text{II: } d \cdot \frac{ei - fh}{\det(A)} + e \cdot \frac{fg - di}{\det(A)} + f \cdot \frac{dh - eg}{\det(A)} = 0$$

$$\text{III: } g \cdot \frac{ei - fh}{\det(A)} + h \cdot \frac{fg - di}{\det(A)} + i \cdot \frac{dh - eg}{\det(A)} = 0$$

Eliminieren des Terms $\frac{dh - eg}{\det(A)}$ und Eliminieren des Terms $\frac{fg - di}{\det(A)}$ ergibt die Gleichung

$$[(af - cd) \cdot (ei - fh) - (di - fg) \cdot (bf - ce)] \cdot \frac{ei - fh}{\det(A)} = f \cdot (ei - fh).$$

Division durch $(ei - fh)$ $(ei - fh \neq 0)$, Multiplikation mit $\det(A)$, Ausmultiplizieren der Klammern und Herausheben von f ergibt $f \cdot (aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi) = f \cdot \det(A)$. Division durch f $(f \neq 0)$ ergibt eine wahre Aussage, der Klammerausdruck auf der linken Seite der Gleichung und die auf der rechten Seite stehende Determinante von A stimmen überein (Regel von Sarrus).

2) ZB $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ laut Formel.

$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, A^{-1} erfüllt die Eigenschaft der zu A inversen Matrix.

9.31 ***1)*** $H(0\ m|27{,}89\ m)$; $H_{30°}(-13{,}945\ m|24{,}153...\ m)$, $H_{45°}(-19{,}721...\ m|19{,}721...\ m)$, $H_{60°}(-24{,}153...\ m|13{,}945...\ m)$

2) $H_\varphi = (27{,}89\ m \cdot \cos(90° + \varphi)|27{,}89\ m \cdot \sin(90° + \varphi))$

9.32 ***a)*** P′(0,707...|4,949...) ***b)*** P′(9,196...|3,928...) ***c)*** P′(−0,982...|2,299...) ***d)*** P′(−2|5)

9.33 ***a)*** A′(0,707...|−2,121...), B′(0,707...|−4,949...), C′(3,535...|−6,363...)

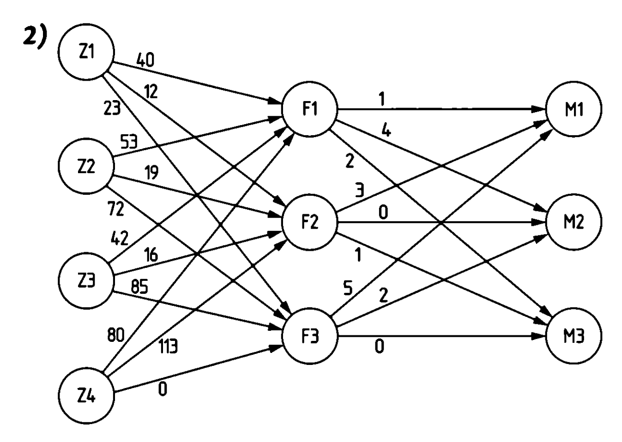
b) A′(0,366...|1,366...), B′(0,464...|7,196...), C′(−2,366...|2,098...)

9.34 ***a)*** M′(5,621...|9,241...) ***b)*** M′(−2,213...|9,437...)

9.35 ***1)***

	M1	M2	M3
Z1	191	206	92
Z2	470	356	125
Z3	515	338	100
Z4	419	320	273

2)



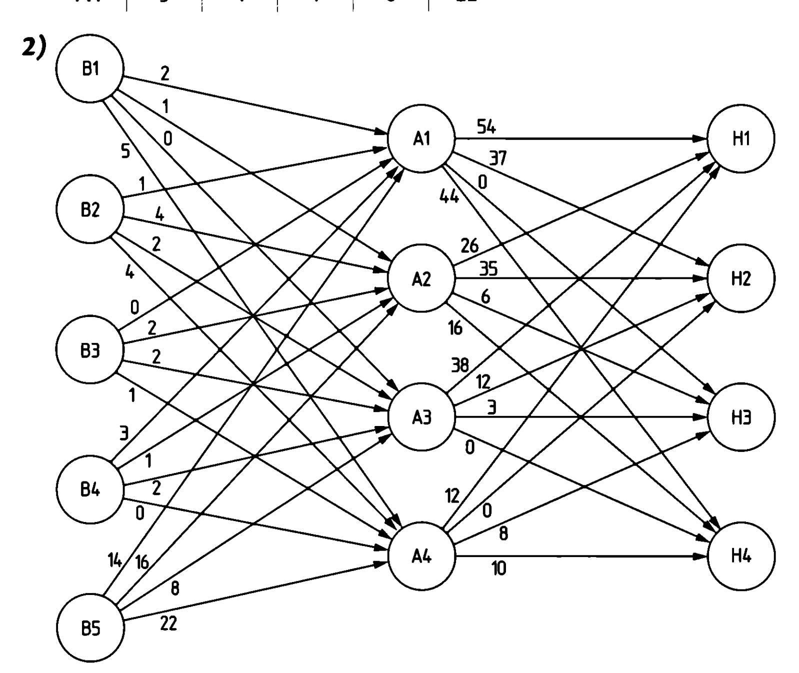
3)

	Mengenanteile
Z1	319 570
Z2	586 000
Z3	571 250
Z4	663 330

9.36 ***1)***

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	2	1	0	3	14
A2	1	4	2	1	16
A3	0	2	2	2	8
A4	5	4	1	0	22

2)



3) 109 277,50 €

9.37 ***1)***

	S1	S2	S3
Z1	110 g		110 g
Z2		180 g	180 g
Z3	130 g	130 g	
Z4	125 g	120 g	

2) Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

9.38 Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

9.39 ***a)*** $\begin{array}{l} \text{I: } 2x - 3y = 12 \\ \text{II: } x + 2y = -1 \end{array}$; $L = \{(3, -2)\}$

b) $\begin{array}{l} \text{I: } 2\alpha + 7\beta = 4 \\ \text{II: } \alpha - 2\beta = -9 \end{array}$; $L = \{(-5, 2)\}$

b) $\begin{array}{l} \text{I: } -5m + 3n = 6 \\ \text{II: } -9m + 8n = -36 \end{array}$; $L = \{(-12, -18)\}$

9.40 ***a)*** $L = \{(2, -2)\}$ ***b)*** $L = \{(-2, -1, 4)\}$ ***c)*** $L = \{(3, 4, 1)\}$

9.41 25 Siege, 8 Unentschieden, 11 Niederlagen

9.42 ***a)*** $L = \{(23{,}988..., 18{,}287..., 0{,}735..., -15)\}$
b) Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, da die Determinante der Koeffizientenmatrix null ist.

9.43 **a)** $D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -9 \\ -6 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $D = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 9 \\ 6 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ **e)** $D = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -6{,}5 & -4 \\ -4 & 1{,}5 & 1 \\ 3{,}5 & -1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -26 \\ -20 & -9 & -18 \\ -8 & 4 & -14 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 17 \\ 18 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **f)** $D = \begin{pmatrix} -8 & 10 & -9 \\ 25 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

9.44 **a)** −1 **b)** 9 **c)** 18

9.45 **a)** 266 **b)** 110 **c)** 70

9.46 **a)** L = {(12, −26)} **b)** L = {(2, −10, 5}

9.47 Zwarch würde allein 4 Stunden brauchen, Zwibel würde allein −6 Stunden brauchen. Eine negative Zeit ist nicht möglich, die Angabe ist daher nicht sinnvoll.

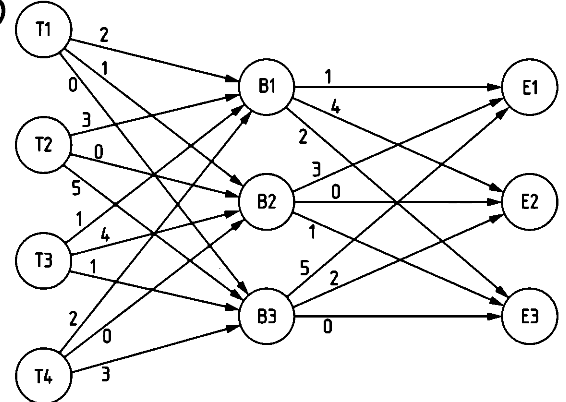
9.48 **a)** Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(65°) & -\sin(65°) \\ \sin(65°) & \cos(65°) \end{pmatrix} \Rightarrow$ Matrix für Programmierung $\begin{pmatrix} 0{,}845... & 0{,}906... \\ 0{,}906... & 0{,}845... \end{pmatrix}$;
P′(−0,967...|2,657...)

b) Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(-25°) & -\sin(-25°) \\ \sin(-25°) & \cos(-25°) \end{pmatrix} \Rightarrow$ Matrix für Programmierung $\begin{pmatrix} 1{,}359... & 0{,}633... \\ -0{,}633... & 1{,}359... \end{pmatrix}$;
P′(11,868...|7,706...)

9.49 **a)** S′(1,598...|3,232...|4) **b)** S′(−0,232...|3,598...|4) **c)** S′(−3,232...|1,598...|4)



9.50 **1)**



2)

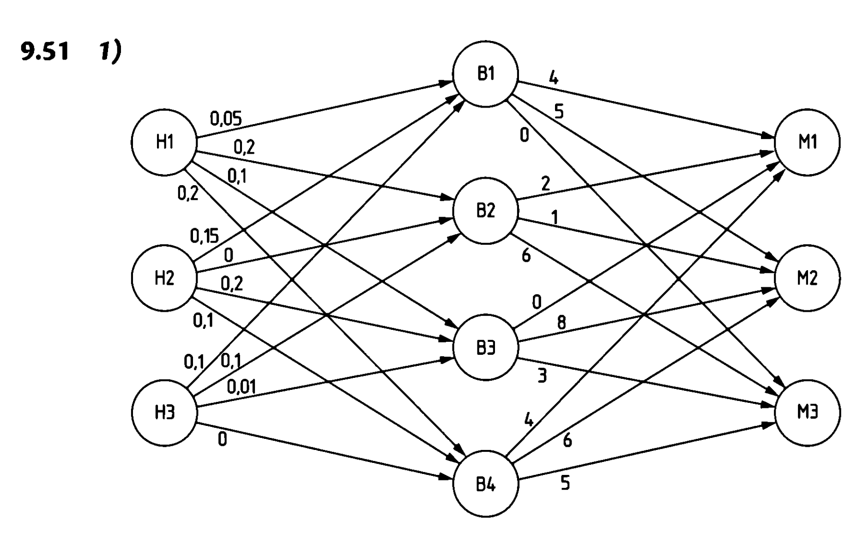
	E1	E2	E3
T1	5	8	5
T2	28	22	6
T3	18	6	6
T4	17	14	4

3)

	Anzahl der Einzelteile
T1	1 010
T2	2 960
T3	1 440
T4	1 860

21 170,00 € Materialkosten

9.51 ***1)***



2) 742,18 €

9.52 ***1)*** 171 Pneumatikzylinder P1 und 276 Pneumatikzylinder P2

2)

Möglichkeiten	H1	H2	E1	E2	E3
	5	0	0	0	0
	4	0	2	1	0
			2	0	2
			1	2	1
			1	1	3
			1	0	5
			0	4	0
			0	3	2
			0	2	4
			0	1	6
			0	0	8
	3	1	1	0	0
			0	1	1
			0	0	3
	2	1	3	1	0
			3	0	2
			2	2	1
			2	1	3
			2	0	5
			1	4	0
			1	3	2
			1	2	4
			1	1	6
			1	0	8
			0	5	1
			0	4	3
			0	3	5
			0	2	7
			0	1	9
			0	0	11
	1	2	2	0	0
			1	1	1
			1	0	3
			0	3	0
			0	2	2
			0	1	4
			0	0	6
	0	3	0	0	1

9.53

	Sivel	Pengler	Petrol
F1	13	18	11
F2	9	15	6
F3	21	9	18

Hinweis:
Die gesuchte Matrix A ergibt sich durch
Umformen der Gleichung
Lieferungen · A = Gelieferte Stück

9.54 ***a)*** P′(5,881…|2,324…) ***b)*** P′(2,8|0,4) ***c)*** P′(5|3) ***d)*** P′(0,2|1,4)

9.55 ***1)*** $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind die Vektoren der beiden Diagonalen.

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{58} = |\overrightarrow{BD}|$, die beiden Diagonalen sind gleich lang.

$\overrightarrow{_{AC}n_L} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BD}$, die Diagonalen stehen im rechten Winkel aufeinander.

$M_{AC} = (1{,}5|2{,}5) = M_{BD}$, die Diagonalen schneiden einander in ihren Mittelpunkten.
ABCD bilden ein Quadrat.

2) A_1(−1,623…|−1,537…), B_1(1,965…|2,477…), C_1(−2,048…|6,066…), D_1(−5,638…|2,052…)

3) A_1'(−1,537…|−1,623…), B_1'(2,477…|1,965…), C_1'(6,066…|−2,048…), D_1'(2,052…|−5,638…)

10 Statistik

10.1 Erstellen einer Häufigkeitstabelle in der Klasse, individuell verschiedene Ergebnisse sind möglich.

10.2 ***1)*** ordinal ***2)*** nominal ***3)*** metrisch ***4)*** metrisch

10.3 ***1)*** Diskret. Es kommen nur natürliche Zahlen als Ergebnis in Frage.
2) Stetig. Die Masse von Hühnereiern kann innerhalb eines bestimmten Bereichs jeden Wert annehmen.
3) Stetig. Innerhalb eines bestimmten Bereichs ist jede Zeitdauer als Verspätung möglich.
4) Diskret. Es kommen nur natürliche Zahlen als Ergebnis in Frage.

10.4 Es sind individuell verschiedene Ergebnisse möglich.

10.5

Größe	h_i	r_i	p_i
8,7 m	1	$0{,}0\dot{6}$	$6{,}\dot{6}$ %
9,8 m	4	$0{,}2\dot{6}$	$26{,}\dot{6}$ %
10,3 m	2	$0{,}1\dot{3}$	$13{,}\dot{3}$ %
10,6 m	3	0,2	20 %
11,2 m	3	0,2	20 %
11,8 m	1	$0{,}0\dot{6}$	$6{,}\dot{6}$ %
12,5 m	1	$0{,}0\dot{6}$	$6{,}\dot{6}$ %
Summe	15	1	100 %

10.6 ***1)*** 217 Haushalte

2)

Anzahl der TV-Geräte	relative Häufigkeit	prozentuelle Häufigkeit
0	0,033…	3,325… %
1	0,482…	48,218… %
2	0,320…	32,066… %
3	0,121…	12,114… %
4	0,042…	4,275… %
Summe	1	100 %

3)

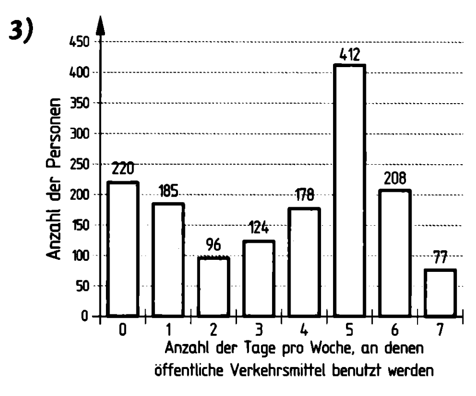
Anzahl der Haushalte
250
200
150
100
50
0
14
203
135
51
18
0 1 2 3 4
Anzahl der TV-Geräte

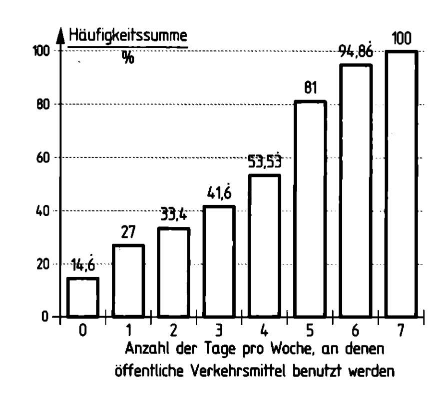
10.7 ***1)*** 220 Personen, 96 Personen, 285 Personen

2)

Tage	relative Häufigkeit	Häufigkeitssumme (in Prozent)
0	$0{,}14\dot{6}$	$14{,}\dot{6}$ %
1	$0{,}12\dot{3}$	27 %
2	0,064	33,4 %
3	$0{,}082\,\dot{6}$	$41{,}\dot{6}$ %
4	$0{,}118\,\dot{6}$	$53{,}5\dot{3}$ %
5	$0{,}274\,\dot{6}$	81 %
6	$0{,}138\,\dot{6}$	$94{,}8\dot{6}$ %
7	$0{,}051\,\dot{3}$	100 %
Summe	1	

3)





4) 81 %

10.8

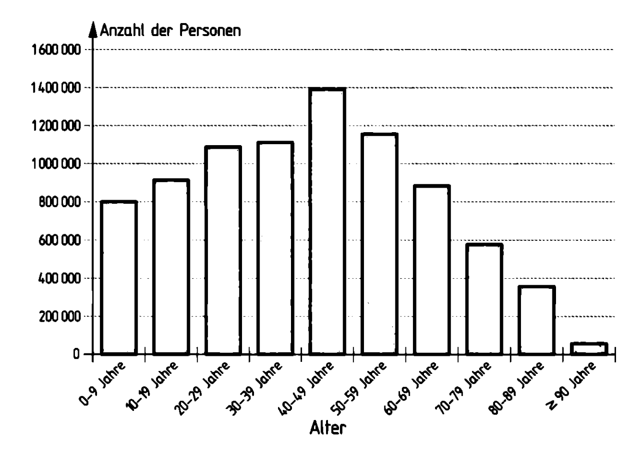
	prozentuelle Häufigkeit
ÖVP	49,799... %
SPÖ	44,598... %
KPÖ	5,416... %
Sonstige	0,185... %
Summe	100 %

Stimmen in Prozent: 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0
49,799...% ÖVP; 44,598...% SPÖ; 5,416...% KPÖ; 0,185...% Sonstige
Parteien

10.9 ***a)*** A+
b) Es ist mit individuell recherchierten Daten zu arbeiten.

10.11

Klassen	**absolute Häufigkeit**
0 – 9 Jahre	800 156
10 – 19 Jahre	913 823
20 – 29 Jahre	1 087 637
30 – 39 Jahre	1 112 830
40 – 49 Jahre	1 392 854
50 – 59 Jahre	1 156 434
60 – 69 Jahre	884 153
70 – 79 Jahre	577 577
80 – 89 Jahre	359 498
⩾ 90 Jahre	58 056
Summe	8 443 018



Stand: 1. 1. 2012

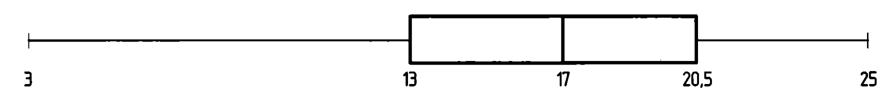
10.12 Im Schnitt hat Katrin 45,00 € eingenommen.

10.13 ***1)*** 129 m^2 ***2)*** $812,\overline{72}$ m^2
Bei ***1)*** entsteht der Eindruck, dass die Häuser der Siedlung im Mittel 129 m^2 Wohnfläche haben.
Bei ***2)*** entsteht der Eindruck, dass die Häuser der Siedlung im Mittel $812,\overline{72}$ m^2 Wohnfläche haben, da die Wohnfläche des Schlosses den ursprünglichen Mittelwert stark anhebt.

10.17 ***a)*** 3,156... mm ***b)*** 4,082... mm

10.18 ***1)*** μ = 18,648... Mio. Einwohner; $\tilde{x}$ = 9,5 Mio. Einwohner
2) Das arithmetische Mittel vergrößert sich auf μ = 40,448... Mio. Einwohner, der Median bleibt unverändert.

10.19 ***1)*** 16,608... Punkte ***2)*** $\tilde{x} = 17$ Punkte, $q_1 = 13$ Punkte, $q_3 = 20{,}5$ Punkte



10.20 Der Modalwert ist immer ein Wert der Urliste, und zwar jener, der am häufigsten vorkommt. Der Median ist bei ungerader Anzahl von Werten ein Wert der Urliste. Das arithmetische Mittel ist nur dann ein Wert der Urliste, wenn zufällig ein Wert gleich groß ist wie der berechnete.

10.21 35,84 Punkte; 2AHET

10.22 ***1)*** zB 1; 4; 8; 9; 13 $\Rightarrow \bar{x} = 7$

$(1 - 7) + (4 - 7) + (8 - 7) + (9 - 7) + (13 - 7) = 0$

2) $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

$x_1 - \bar{x} = \frac{n \cdot x_1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n}{n}$, analog für $x_i - \bar{x}$; die Summe dieser Differenzen ergibt:

$\frac{n \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = \frac{0}{n} = 0$

10.23 ***1)*** Gruppe 1: 3, Gruppe 2: 3

2) Der größte und der kleinste Wert liegen bei der zweiten Gruppe weiter auseinander, trotzdem sind die Mittelwerte beider Gruppen gleich.

10.25 ***A)*** → ***1), 3), 8)***

B) → ***3), 5), 7), 8)***

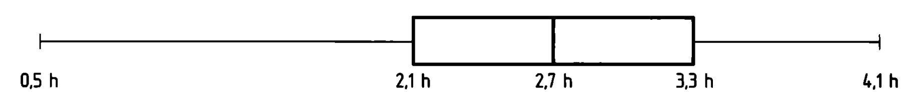
C) → ***2), 3), 6)***

D) → ***2), 3), 7), 8)***; ***5)*** ist nicht eindeutig entscheidbar

E) → ***1), 2), 3), 4), 6)***

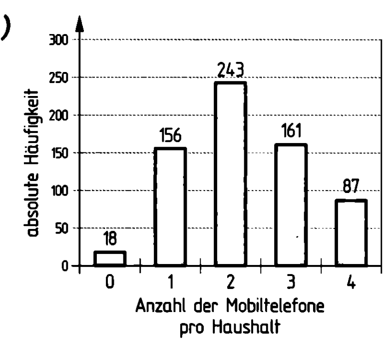
F) → ***1), 3), 4)***

10.26 ***1)*** $\tilde{x} = 2{,}7$ h, $q_1 = 2{,}1$ h, $q_3 = 3{,}3$ h, Interquartilsabstand: 1,2 h, kleinster Wert 0,5 h, größter Wert 4,1 h, Spannweite R = 3,6 h



2) $\bar{x} = 2{,}643\ldots$ h, $s^2 = 0{,}919\ldots$ h^2

10.27 ***1)***



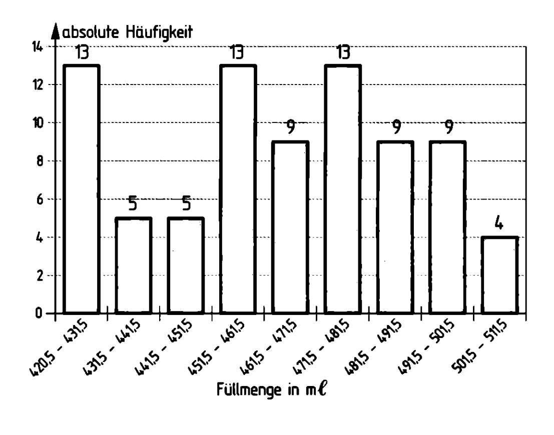
2) 2,215... Mobiltelefone

3) $s^2 = 1{,}063\ldots$, $s = 1{,}031\ldots$ Mobiltelefone

10.28 $s^2 = 134{,}390\ldots$ kg^2, $s = 11{,}592\ldots$ kg

10.29 ***1)***

Klassen	absolute Häufigk.	relative Häufigk.
420,5 mℓ – 431,5 mℓ	13	0,162 5
431,5 mℓ – 441,5 mℓ	5	0,062 5
441,5 mℓ – 451,5 mℓ	5	0,062 5
451,5 mℓ – 461,5 mℓ	13	0,162 5
461,5 mℓ – 471,5 mℓ	9	0,112 5
471,5 mℓ – 481,5 mℓ	13	0,162 5
481,5 mℓ – 491,5 mℓ	9	0,112 5
491,5 mℓ – 501,5 mℓ	9	0,112 5
501,5 mℓ – 511,5 mℓ	4	0,05
Summe	80	1



2) $\bar{x}$ = 464,418... mℓ, s = 24,694... mℓ

10.30 $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{x} + n \cdot \bar{x}^2\right) =$

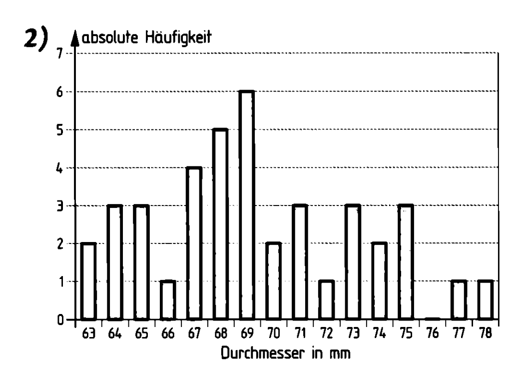
$= \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot n \cdot \bar{x} + n \cdot \bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n \cdot \bar{x}^2 + n \cdot \bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2\right)$

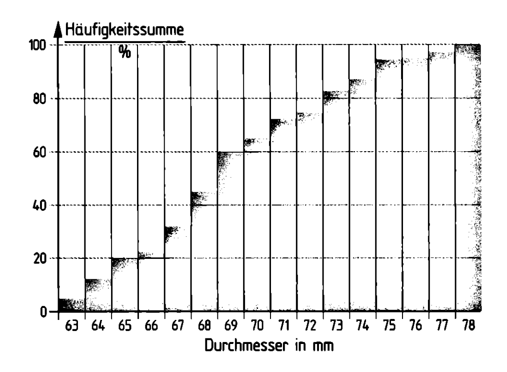
10.31 metrische Merkmale: Geburtsgewicht von Säuglingen, Inflationsrate von Staaten
Rangmerkmale: Größenklassen von Hühnereiern, Sterne von Hotels
nominale Merkmale: Staatsangehörigkeit, Religionszugehörigkeit

10.32 ***1)***

Durchmesser in mm	h_i	r_i	p_i	Häufigkeitssumme
63	2	0,05	5,0 %	5,0 %
64	3	0,075	7,5 %	12,5 %
65	3	0,075	7,5 %	20,0 %
66	1	0,025	2,5 %	22,5 %
67	4	0,1	10,0 %	32,5 %
68	5	0,125	12,5 %	45,0 %
69	6	0,15	15,0 %	60,0 %
70	2	0,05	5,0 %	65,0 %
71	3	0,075	7,5 %	72,5 %
72	1	0,025	2,5 %	75,0 %
73	3	0,075	7,5 %	82,5 %
74	2	0,05	5,0 %	87,5 %
75	3	0,075	7,5 %	95,0 %
76	0	0	0 %	95,0 %
77	1	0,025	2,5 %	97,5 %
78	1	0,025	2,5 %	100,0 %
Summe	40	1	100,0 %	

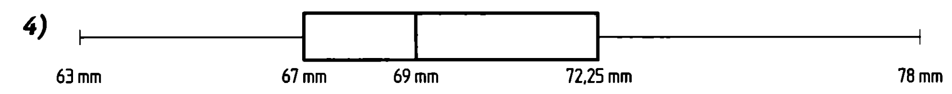
2)





3) $\bar{x}$ = 69,325 mm, $\tilde{x}$ = 69 mm, q_1 = 67 mm, q_3 = 72,25 mm

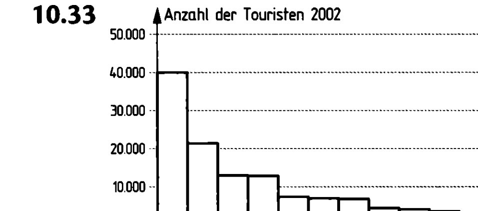
4)

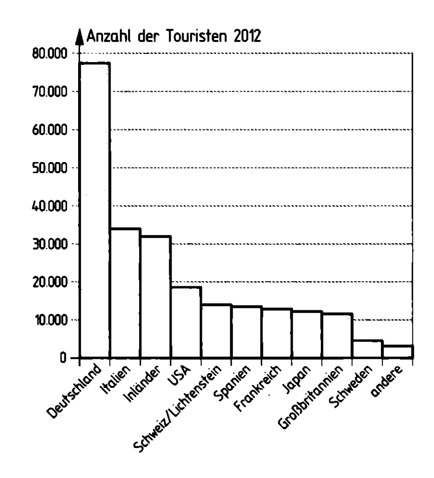


R = 15 mm, d = 5,25 mm

5) s^2 = 15,250... mm^2, s = 3,905... mm

10.33



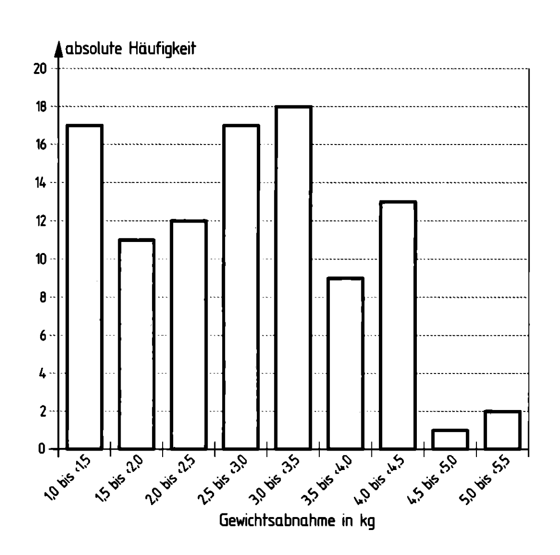


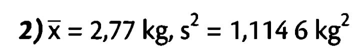
2002 kamen die meisten Touristen aus Deutschland, gefolgt von den Touristen aus dem Inland. Die Anzahl der deutschen Touristen war fast doppelt so hoch wie die Anzahl der inländischen Touristen.
Auch 2012 kamen die meisten Touristen aus Deutschland, gefolgt von den Touristen aus Italien und den Touristen aus dem Inland. Die Anzahl der deutschen Touristen war mehr als doppelt so hoch wie die Anzahl der italienischen Touristen.
Die Anzahl der deutschen Touristen hat sich gegenüber 2002 beinahe verdoppelt. Auch die Anzahl der Touristen aus allen anderen angegebenen Ländern hat sich gegenüber 2002 deutlich erhöht.

10.34 **1)** $\bar{x}$ = 1 kΩ, $\bar{x}$ ist genau der Nennwert
2) [0,95 kΩ; 1,05 kΩ] Alle Werte liegen innerhalb des Toleranzbereichs.
3) 1,01
4) mit der Varianz, s^2 = 0,000 841... kΩ

10.35 ***1)***

Gewichtsabnahme in kg	h_i	r_i
1,0 bis < 1,5	17	0,17
1,5 bis < 2,0	11	0,11
2,0 bis < 2,5	12	0,12
2,5 bis < 3,0	17	0,17
3,0 bis < 3,5	18	0,18
3,5 bis < 4,0	9	0,09
4,0 bis < 4,5	13	0,13
4,5 bis < 5,0	1	0,01
5,0 bis < 5,5	2	0,02
Summe	100	1




2) $\bar{x} = 2{,}77$ kg, $s^2 = 1{,}114\,6$ kg^2

11 Folgen und Reihen

11.1 ***1)*** 12, gerade Zahlen ***2)*** 13, Primzahlen ***3)*** 36, Quadratzahlen

11.2 ***1)*** 9, ungerade Zahlen ***2)*** 117 649, Vielfache von 7
3) –6, positive ungerade Zahlen abwechselnd mit negativen geraden Zahlen
4) –11, die Folgeglieder werden jeweils um 4 kleiner

11.3 ***a)*** das Ein- bis Zehnfache von 3 ***b)*** das Ein- bis Neunfache von 11

11.4 ***a)*** Primzahlen von 2 bis 19
b) Brüche mit Zähler: natürliche Zahlen von 8 bis 17, Nenner: ungerade Zahlen von 7 bis 25

11.5 ***1)*** Das erste und das zweite Glied haben den Wert 1, das folgende Glied ergibt sich jeweils durch Addition der beiden vorhergehenden Glieder.
2) ⟨1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, 317 811, 514 229, 832 040, 1 346 269, 2 178 309, 3 524 578, 5 702 887, 9 227 465, 14 930 352, 24 157 817, 39 088 169, 63 245 986, 102 334 155, 165 580 141, 267 914 296, 433 494 437, 701 408 733, 1 134 903 170, 1 836 311 903, 2 971 215 073, 4 807 526 976, 7 778 742 049, 12 586 269 025⟩; das einunddreißigste
3) 987

11.6 ***1)*** jeweils 36 cm ***2)*** 234 cm, 252 cm, 270 cm, $n \cdot 18$ cm

11.11 ***1)*** Arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist jeweils 2,93.
2) Keine arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist nicht konstant.
3) Keine arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist nicht konstant.
4) Arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist jeweils null.

11.12 ***a)*** Arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist jeweils (–5).
b) Keine arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist nicht konstant.
c) Keine arithmetische Folge; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist nicht konstant.

11.13 ***1)*** ⟨7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43⟩
2) ⟨7, 5, 3, 1, –1, –3, –5, –7, –9, –11⟩
3) ⟨12, 7, 2, –3, –8, –13, –18, –23, –28, –33⟩

11.14 ***a) 1)*** $a_{n+1} = a_n - 0{,}5$ mit $a_1 = 2$ ***2)*** $a_n = 2 - 0{,}5 \cdot (n - 1)$
b) 1) $a_{n+1} = a_n + 4$ mit $a_1 = -19$ ***2)*** $a_n = 4 \cdot (n - 1) - 19$
c) 1) $a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}$ mit $a_1 = 3$ ***2)*** $a_n = 3 - \frac{2}{3} \cdot (n - 1)$

11.15 ***a)*** ⟨11, 14, 17, 20, 23⟩ ***b)*** ⟨125, 121, 117, 113, 109⟩ ***c)*** ⟨–2,5, –2, –1,5, –1, –0,5⟩

11.16 ***a)*** $a_n = -2 + (n - 1) \cdot 2$ ***b)*** $a_n = 119 - (n - 1) \cdot 4$ ***c)*** $a_n = -3{,}75 + (n - 1) \cdot 0{,}75$

11.17 ***a)*** 3,25, 5,5, 7,75 ***b)*** 18, 32, 46, 60, 74 ***c)*** 81,75, 73,5, 65,25, 57, 48,75, 40,5, 32,25

11.18 ***a)*** –3, 1, 5 ***b)*** 0, 5, 10 ***c)*** –9, –6, –3
Aufstellen der Gleichung für die Summe $s = a_1 + a_2 + a_3$ mit $a_1 = a_2 - d$ und $a_3 = a_2 + d$ ergibt $s = 3a_2$. Umformen auf $a_2 = \frac{s}{3}$. Das ist das mittlere der drei Glieder.
Aufstellen der Gleichung für das Produkt: $p = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ mit $a_1 = a_2 - d$ und $a_3 = a_2 + d$ ergibt $p = (a_2 - d) \cdot a_2 \cdot (a_2 + d)$. Umformen auf $d = \sqrt{a_2^2 - \frac{p}{a_2}}$.
Berechnung der anderen beiden Glieder der Folge durch Addition bzw. Subtraktion von d zu a_2.

11.19 72

11.20 ***a)*** 73,739...° ***b)*** 73,739...° ***c)*** 73,739...°

11.21 ***a)*** 769 ***b)*** 2 499 ***c)*** 243

11.22 $T(n) = 15\,°C - 7\,\frac{°C}{km} \cdot n$, $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 11\}$
Die Temperatur sinkt innerhalb von 10 km von 15 °C auf –55 °C um insgesamt 70 °C. Das entspricht einer Temperatursenkung von 7 °C pro km (= Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Folgegliedern). Die Anfangstemperatur beträgt 15 °C (= erstes Folgeglied).

11.23 Gegeben sei die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle = \langle ..., a_k - d, a_k, a_k + d, ... \rangle$. Dann gilt:
$\frac{(a_k - d) + (a_k + d)}{2} = \frac{2a_k}{2} = a_k$

11.24 ***1)*** $x = 13$, $a_n = -6 + (n - 1) \cdot 25$ ***2)*** 69, 94, 119

11.25 $a : b : c = 3 : 4 : 5$
Die beiden Katheten a und b sowie die Hypotenuse c bilden die Glieder einer arithmetischen Folge $\langle a, b, c \rangle$. Es gilt $a = b - d$ und $c = b + d$. Einsetzen in den Satz von Pythagoras ergibt $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. $(b - d)^2 + b^2 = (b + d)^2$. Ausquadrieren und Umformen ergibt $d = \frac{b}{4}$. Die arithmetische Folge lautet $\left\langle b - \frac{b}{4}, b, b + \frac{b}{4} \right\rangle$ bzw. $\left\langle \frac{3b}{4}, b, \frac{5b}{4} \right\rangle$. Daher verhält sich $a : b : c$ wie $\frac{3}{4} : 1 : \frac{5}{4}$. Multiplikation mit 4 ergibt $a : b : c = 3 : 4 : 5$.

11.26 Sind a_m und a_n $(m > n)$ beliebige Glieder einer arithmetischen Folge, dann gilt:
I: $a_m = a_1 + (m - 1) \cdot d$ und II: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$. Umformen der zweiten Gleichung auf a_1 ergibt $a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $a_m = a_n - (n - 1) \cdot d + (m - 1) \cdot d$. Herausheben von d und zusammenfassen ergibt $a_m = a_n + (m - n) \cdot d$.

11.27 ***1)*** 8 Bücher ***2)*** 110 Bücher

11.29 ***a)*** $s_{14} = 157{,}5$ ***b)*** $s_{23} = 2\,691$ ***c)*** $s_{60} = 4\,260$

11.30 ***a)*** $n = 14$ ***b)*** $n = 34$

11.31 ***a)*** $\sum_{k=1}^{20} (3k - 10)$ ***b)*** $\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{k}{4} - 2\right)$ ***c)*** $\sum_{k=1}^{20} (3k - 12)$

11.32 7 071 071

11.33 Renée spart bis inklusive Juni insgesamt 280,00 € an. Dieser Betrag liegt innerhalb der angegebenen Bandbreite der Kosten für den Mopedausweis. Wenn sie allerdings sicher gehen möchte, dass sie mit den Ersparnissen die Kosten abdecken kann, muss sie einen Monat länger sparen.

11.34 0,60 € bzw. 3,10 €

11.35 ***a)*** Ja, die Summe aller Preisgelder beträgt genau 15 000,00 €.
b) 1. Preis: 1 916,67 €, 2. Preis: 1 816,67 €, 3. Preis: 1 716,67 €

11.36 Sowohl die Formel für s_n als auch für a_n enthält jeweils vier Unbekannte. Deshalb müssen drei Größen bekannt sein, um die vierte eindeutig bestimmen zu können.

11.37 ***a)*** ***1)*** $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32$ ***2)*** $\sum_{n=1}^{10}(3n + 2)$

b) ***1)*** $-14{,}5 - 8{,}5 - 2{,}5 + 3{,}5 + 9{,}5 + 15{,}5 + 21{,}5 + 27{,}5 + 33{,}5 + 39{,}5$ ***2)*** $\sum_{n=1}^{10}(6n - 20{,}5)$

c) ***1)*** $0{,}5 - 1{,}9 - 4{,}3 - 6{,}7 - 9{,}1 - 11{,}5 - 13{,}9 - 16{,}3 - 18{,}7 - 21{,}1$ ***2)*** $\sum_{n=1}^{10}(2{,}9 - 2{,}4n)$

11.38 $\langle -29, -14, 1, 16, 31\rangle$

11.39 ab der 13. Reihe

11.40 1 073,741... m^2, 128,877... min = 2,147... h

11.44 ***a)*** $\langle 48, 144, 432, 1\,296, 3\,888\rangle$, $b_4 = 1\,296$
b) $\langle 4, 20, 100, 500, 2\,500\rangle$, $b_8 = 312\,500$
c) $\langle 6, 36, 216, 1\,296, 7\,776\rangle$, $b_8 = 1\,679\,616$

11.45 ***a)*** $b_{n+1} = 2b_n$ mit $b_1 = 7$; $b_n = 7 \cdot 2^{n-1}$ bzw. $b_{n+1} = -2b_n$ mit $b_1 = -7$; $b_n = (-7) \cdot (-2)^{n-1}$
b) $b_{n+1} = 0{,}1b_n$ mit $b_1 = 200\,000$; $b_n = 200\,000 \cdot 0{,}1^{n-1}$ bzw. $b_{n+1} = -0{,}1b_n$ mit $b_1 = -200\,000$; $b_n = -200\,000 \cdot (-0{,}1)^{n-1}$
c) $b_{n+1} = -4b_n$ mit $b_1 = -10$; $b_n = -10 \cdot (-4)^{n-1}$

11.46 ***a)*** 18, 45, 112,5 ***b)*** 8,1, 24,3, 72,9 ***c)*** 3,2, 16, 80

Da b_1, b_2 und b_3 eine geometrische Folge bilden, gilt $b_1 = \frac{b_2}{q}$ und $b_3 = b_2 \cdot q$. Aufstellen der Gleichung für das Produkt $p = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$ ergibt $p = b_2^3$. Umformen auf $b_2 = \sqrt[3]{p}$. Das ist das mittlere der drei Glieder.
Aufstellen der Gleichung für die Summe $s = b_1 + b_2 + b_3$ ergibt $s = \frac{b_2}{q} + b_2 + b_2 \cdot q$.
Herausheben von b_2, Division durch b_2 und Multiplikation mit q ergibt $q^2 + q + 1 = \frac{s}{b_2} \cdot q$.
Subtraktion des Terms auf der rechten Seite und Herausheben von q ergibt die quadratische Gleichung $q^2 + q \cdot \left(1 - \frac{s}{b_2}\right) + 1 = 0$ mit den Lösungen $q_{1,2} = -\frac{1 - \frac{s}{b_2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{s}{b_2}\right)^2}{4} - 1}$.
Berechnung von b_1 durch Division durch q bzw. von b_3 durch Multiplikation mit q. Je nachdem, ob q_1 oder q_2 zur Berechnung verwendet wird, sind die Folgeglieder auf- oder absteigend.

11.47 zB $\langle 3, 3, 3, \ldots\rangle$ ist eine arithmetische Folge mit $a_1 = 3$ und $d = 0$. $\langle 3, 3, 3, \ldots\rangle$ ist aber auch eine geometrische Folge mit $b_1 = 3$ und $q = 1$.

11.48 ***a)*** $b_1 = 1{,}5$, $q = 3$ bzw. $b_1 = 4{,}5$, $q = 2$ ***b)*** $b_1 = -3$, $q = -2$

11.49 $x_1 = 15$; $\langle 40, 160, 640, 2\,560, 10\,240, 40\,960\rangle$
$x_2 = -7{,}\dot{2}$; $\langle -4{,}\dot{4}; -40; -360; -3\,240; -29\,160; -262\,440\rangle$

11.50 ***a)*** $a = -58$, $b = 29$ bzw. $a = b = 116$
b) $a = 136$, $b = -68$ bzw. $a = b = -272$
c) $a = -440$, $b = 220$ bzw. $a = b = 880$

11.51 $\langle$860 min^{-1}, 1 030,068... min^{-1}, 1 233,767... min^{-1}, 1 477,749... min^{-1}, 1 769,980... min^{-1}, 2 120 $min^{-1}\rangle$
$\approx \langle$860 min^{-1}, 1 030 min^{-1}, 1 234 min^{-1}, 1 478 min^{-1}, 1 770 min^{-1}, 2 120 $min^{-1}\rangle$

11.52 13 437,97 €, 16 125,56 €, 19 350,68 €, 23 220,81 €, 27 864,98 €

11.53 Sei $\langle b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, b_1 \cdot q^3 \ldots\rangle$ eine geometrische Folge und $\langle \log b_1, \log (b_1 \cdot q), \log (b_1 \cdot q^2), \log (b_1 \cdot q^3) \ldots\rangle$ die Folge ihrer Logarithmen. Dann erhält man durch Anwenden der Rechenregeln für Logarithmen $\langle \log b_1, \log b_1 + \log q, \log b_1 + 2 \cdot \log q, \log b_1 + 3 \cdot \log q \ldots\rangle$ mit $a_1 = \log b_1$ und $d = \log q$, also eine arithmetische Folge.

11.54 Seien $\left\langle \ldots, \frac{b_k}{q}, b_k, b_k \cdot q \ldots\right\rangle$ drei aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Folge, dann gilt: $\sqrt{\left(\frac{b_k}{q}\right) \cdot (b_k \cdot q)} = \sqrt{b_k^2} = b_k$.

11.55 ***1)*** 73-mal ***2)*** 26,998... m

11.56

c′ = 261,625... Hz	e′ = 329,627... Hz	g′ = 391,995... Hz	ais′ = 466,163... Hz
cis′ = 277,182... Hz	f′ = 349,228... Hz	gis′ = 415,304... Hz	h′ = 493,883... Hz
d′ = 293,644... Hz	fis′ = 369,994... Hz	a′ = 440 Hz	c″ = 523,251... Hz
dis′ = 311,126... Hz			

11.57 $\sqrt[1200]{2}$

Eine Oktave umfasst 12 · 100 Cent = 1 200 Cent. Für einen um eine Oktave höheren Ton gilt daher $b_{1201} = b_1 \cdot q^{1200}$. Für den Kammerton a′ und den um eine Oktave höheren Ton a″ erhält man die Gleichung $880 = 440 \cdot q^{1200}$. Umformen auf q ergibt den angegebenen Faktor.

11.58 Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.

1) Für $d = 0$ ändert sich die Größe der Folgeglieder nicht. Für $d > 0$ nimmt die Größe der Folgeglieder linear zu, für $d < 0$ nimmt die Größe der Folgeglieder linear ab. Die Zunahme bzw. Abnahme ist umso größer, je größer $|d|$ ist. Für $d = 1$ ist das nächstgrößere Folgeglied um 1 größer.

2) Für $q > 1$ nimmt die Größe der Folgeglieder exponentiell zu. Für $q = 1$ ändert sich die Größe der Folgeglieder nicht. Für $0 < q < 1$ nimmt die Größe der Folgeglieder exponentiell ab. Für $q = 0$ entsteht die Nullfolge $\langle 2, 0, 0, 0 \ldots\rangle$. Für $-1 < q < 0$ nimmt der Betrag der Folgeglieder exponentiell ab, das Vorzeichen der Folgeglieder ist alternierend. Für $q < -1$ nimmt der Betrag der Folgeglieder exponentiell zu, das Vorzeichen der Folgeglieder ist alternierend.

11.59 Der Durchmesser der mittleren Mutter beträgt ***1)*** $d_a = 20$ mm bzw. ***2)*** $d_g = 17{,}320\ldots$ mm.
Auf die grafische Darstellung wird verzichtet.
Fall ***2)*** entspricht eher dem Gefühl für „gleichmäßig" wachsend. Die gezeichneten Sechsecke können so angeordnet werden, dass ihre Umkreise zwei gemeinsame Tangenten haben.

11.61 ***a)*** 1,584... ***b)*** 1,258... ***c)*** 1,122... ***d)*** 1,059...

11.62 ***a)*** 99,53 % ***b)*** 58,49 % ***c)*** 216,23 % ***d)*** 58,49 %

11.63 ***a)*** 10 cm, 15,848 9 cm, 25,118 9 cm, 39,810 7 cm

b) 100 mm, 112,201 8 mm, 125,892 5 mm, 141,253 8 mm, 158,489 3 mm, 177,827 9 mm, 199,526 2 mm

c) 0,1 m, 0,125 9 m, 0,158 5 m, 0,199 5 m, 0,251 2 m, 0,316 2 m, 0,398 1 m

11.64 ***1)*** und ***2)***

Genauwerte von R40	R40	prozentuelle Abweichung
1,000 0	1	
1,059 3	1,06	0,066...
1,122 0	1,12	−0,178...
1,188 5	1,18	−0,715...
1,258 9	1,25	−0,706...
1,333 5	1,32	−1,012...
1,412 5	1,4	−0,884...
1,496 2	1,5	0,253...
	...	

Die maximale Abweichung beträgt ca. 1 %.

11.65 Maße in mm

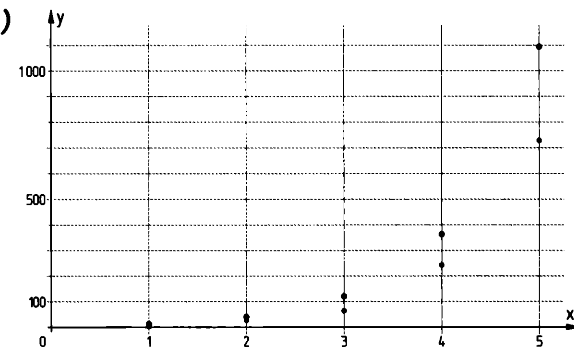
Normzahlenreihe	211,348 9	298,538 2	421,696 5	595,662 1	841,395 1	1 188,502 2
Papierformate	A5: 210	A4: 297	A3: 420	A2: 594	A1: 841	A0: 1 189

11.66 8 + 4 + 2 + 1 = 15 Spiele

11.68 ***a)*** $s_5 = 366{,}093\,75$ ***b)*** $s_7 = -32{,}753...$ ***c)*** $s_{10} = 9{,}042...$



11.69 ***1), 2)***



Die Funktionswerte beider Graphen werden exponentiell größer. Der Graph zu ***2)*** ist stärker steigend als der Graph zu ***1)***.

11.70 $b_n = 2^n$
Es gibt 2 Eltern, vor 2 Generationen gab es 4 Großeltern, vor 3 Generationen gab es 8 Urgroßeltern usw. Für die Anzahl der Vorfahren gilt daher die angegebene Formel.

11.71 $s_6 = \frac{63}{8}$

11.72 $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32 \rangle$

11.73 Beginnend mit der jüngsten Person 80 000,00 €, 40 000,00 €, 20 000,00 € bzw. 10 000,00 €.

11.74 Am Donnerstag der dritten Woche. 40,544... km

11.75 68,25 m; 88,72 m; 115,34 m; 149,94 m; 194,92 m; 253,40 m; 329,42 m

11.76 Selbst wenn man eine Tausendkornmasse von nur 40 g annimmt, beträgt die Belohnung mehr als das 1 000-Fache (1 133,440...) der Welternte von 2010.

11.77 ***1)*** 40,951 cm ***2)*** 494,784... g

11.78 214 748 364 Kreuzer 15 Paradeinlein

11.81 ***a)*** 11,20 € ***b)*** 1,75 € ***c)*** 9,17 € ***d)*** 4,25 €

11.82 ***a)*** 3,490... % ***b)*** 4,08 %

11.83 ***a)*** 216 Tage ***b)*** 199,804... Tage

11.84 ***a)*** 5,950... % ***b)*** 11,174... %
c) Wenn der Betrag innerhalb von 14 Tagen nach seiner Einzahlung wieder abgehoben wird, werden keine Zinsen ausbezahlt. Daher kann i nicht berechnet werden.

11.85 ***a)*** 57,142... Jahre ***b)*** $44,\dot{4}$ Jahre ***c)*** 25 Jahre ***d)*** 15,384... Jahre

11.87 ***a)*** ***1)*** 1,015 ***2)*** 1,011 25 ***c)*** ***1)*** 1,037 5 ***2)*** 1,028 125
b) ***1)*** 1,021 25 ***2)*** 1,015 937 5 ***d)*** ***1)*** 1,043 75 ***2)*** 1,032 812 5

11.88 ***a)*** 4 375,81 € ***b)*** 308,50 € ***c)*** 75 135,86 € ***d)*** 57,96 €

11.89 ***a)*** q = 1,053..., i = 5,375... % ***c)*** q = 1,011..., i = 1,166... %
b) q = 1,018..., i = 1,874... % ***d)*** q = 1,021..., i = 2,174... %

11.91 ***a)*** 9,284... Jahre ***b)*** 15,869... Jahre ***c)*** 5,322... Jahre

11.92 ***a)*** 18,530... Jahre ***b)*** 30,333... Jahre

11.93 7 584,73 €
Berechnung des Kapitals nach drei Jahren mit $K_3 = 5\,000\,€ \cdot 1{,}06^3$, Berechnung des Kapitals nach weiteren fünf Jahren mit $K_8 = 5\,000\,€ \cdot 1{,}06^3 \cdot 1{,}031\,25^5$, Berechnung des Endwerts nach insgesamt zehn Jahren mit $K_{10} = 5\,000\,€ \cdot 1{,}06^3 \cdot 1{,}031\,25^5 \cdot 1{,}045^2 = 7\,584{,}727...\,€$.

11.94 Frau Meier würde für das Kapitalsparbuch nur 282 231,22 € erhalten. Sie soll also das zweite Angebot annehmen.

11.95 Herr Franz soll 3 815,53 € verlangen, damit ist die Inflation abgedeckt.

11.96 Eva: 2 414,78 €, Maria: 2 287,26 €, Achim: 2 052,08 €

11.97 0,5 % (0,500 03...)

11.98 Rechnet man zB mit 1 % Zinsen, so beträgt die Schuld nach 400 Jahren ca. 30 000,00 €, und zB bei 2 % Zinsen ca. 1,6 Mio. €. Es ist daher klar, dass Prinz Charles versucht, die Bezahlung von Zinsen zu vermeiden.

11.99 Der Wucherer hat 10,064... % genommen.

11.100 ***A)*** Arithmetische Folge. Jedes Folgeglied ist um d = 0,5 größer als sein Vorgänger.
B) Weder noch. $a_1 = 0$ ist nur bei einer arithmetischen Folge möglich, dann müsste der Verlauf aber linear sein.
C) Geometrische Folge. Die Folgeglieder werden exponentiell mit q = 0,75 kleiner.
D) Geometrische Folge. Durch Multiplikation eines Folgeglieds mit q = –1 erhält man das nächstfolgende.

11.101 ***a)*** $a_n = 13 - 5n$ ***b)*** $b_n = 10^{-6} \cdot 5^n$

11.102 ***a)*** 494 550 ***b)*** 4 949 955 000

11.103 ***a)*** 19,416 % ***b)*** 1 832,88 € ***c)*** 403,361... Tage ***d)*** 223 578,95 €

11.104 $a : b : c = 1 : q : q^2$

11.105 ***1)*** $a_n = 101\,325\,\text{Pa} - 12{,}5\,\frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot n$ ***2)*** 96 325 Pa ***3)*** 4 106 m ***4)*** 2 026,5 m

11.106 Für die Berechnung der Durchmesser eignen sich R5, R10/2, R20/4, R40/8 usw.
Die Schläuche haben folgende (gerundete) Durchmesser (in mm): 25, 40, 63, 100, 158, 251, 398

11.107 835,24 €

11.108 Das nächstkleinere Format erhält man jeweils durch Halbieren der Länge. Aus den Abmessungen 1 414 mm × 1 000 mm für B0 ergibt sich daher die geometrische Folge
⟨1 414 mm, 1 000 mm, 707 mm, 500 mm, 353 mm, 250 mm ...⟩
(Abweichungen rundungsbedingt).
$q = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707...$

11.109 ***1)*** 975 000 FFR ≈ 148 637,79 € (erste Rate März 1965, letzte Rate August 1997)
2) 8 770,15 FFR ≈ 1 337,00 €

Fehlerrechnung 12

12.1 ***1)*** auf Millimeter genau
2) Messungenauigkeit durch schlechtes Anlegen des Zentimetermaßes, Ungenauigkeit beim Ablesen

12.2 Zu rasches Ablesen liefert ein falsches Ergebnis, falsches Ablesen der Temperatur, falsches Positionieren des Thermometers, ...

12.3 Rundungsfehler; die Körpergröße kann nur auf eine bestimmte Anzahl von Stellen genau angegeben werden.

12.4 Verfahrens- und Rundungsfehler

12.5 ***1)*** Marion ist vermutlich nicht genau 175 cm groß. Ihre Größe kann zwischen 174,5 cm und 175,5 cm liegen.
2) Die Anzahl der Schülerinnen und Schüler ist genau bestimmbar, deshalb ist die Fragestellung nicht sinnvoll.

12.6 Bernhards Ergebnis ist genau, da er mit Brüchen arbeitet und nicht runden muss. Christophs und Elfis Berechnungen unterliegen Rundungsfehlern, wobei Elfis Ergebnis weniger stark vom exakten Ergebnis abweicht.

12.7 ***1)*** und ***4)*** sind exakt bestimmbar. Die Größen werden abgezählt.
6) ist exakt bestimmbar, da der Fußlänge eine bestimmte Schuhgröße zugeordnet werden kann.
2), ***3)*** und ***5)*** sind wegen Messungenauigkeiten nur mit beschränkter Genauigkeit bestimmbar.

12.8 Bei ***1)*** weicht der gemessene Wert um höchstens $2,\overline{27}$ % vom tatsächlichen Wert ab. Bei ***2)*** beträgt die Abweichung 4,179... %. Messung ***1)*** war daher genauer.

12.10 $4,\dot{0}\dot{4}$ %

12.11 2 cm

12.12 49,25 kg

12.13 Mindestfüllmenge: 447,75 mℓ, Höchstfüllmenge: 452,25 mℓ

12.14 ***1)*** mindestens: $-0,024\,21\,\frac{kg}{m^3}$ bzw. 0,002 42... %
höchstens: $-0,025\,89\,\frac{kg}{m^3}$ bzw. 0,002 58...%
2) Die Abweichung ist sehr gering, Berechnungen mit einer Dichte von $1000\,\frac{kg}{m^3}$ sind wesentlich einfacher. Der Wert $1000\,\frac{kg}{m^3}$ ist einfacher zu merken.

12.15 Der Wert für den ersten Tag wird sehr genau prognostiziert, die Temperatur liegt am Ende des Tags zwischen 17,7 °C und 19 °C. Der Wert zwei Wochen später kann nur sehr ungenau prognostiziert werden, die Temperatur liegt zwischen 9,6 °C und 19 °C.

12.17 ***a)*** 10,5 cm bzw. 20 cm^2 ***b)*** 0,751 g bzw. 0,008 g^2 ***c)*** 5 bzw. 5

12.18 ***1)*** $A \in [2\,336,25\text{ m}^2; 2\,434,25\text{ m}^2[$ $A = 2\,385\text{ m}^2$
2) $K \in [338\,756,25\text{ €}; 352\,966,25\text{ €}[$ $K = 345\,825,00\text{ €}$

12.19 $V \in [63,51\text{ cm}^3; 66,94\text{ cm}^3[$

12.21 ***a)*** $\Delta a = 0,6$; $\frac{\Delta a}{a} = 0,6 = 60$ % ***c)*** $\Delta c = 2,1$; $\frac{\Delta c}{c} = 0,087\,5 = 8,75$ %
b) $\Delta b = 2,3$; $\frac{\Delta b}{b} = 0,082... = 8,214...$ %

12.22 – 12.35

12.22 ***a)*** $\frac{\Delta a}{a} \approx 0{,}09\dot{6} = 9{,}\dot{6}\ \%$; $\Delta a \approx 14{,}5$

b) $\frac{\Delta b}{b} \approx 0{,}05\dot{6} = 5{,}\dot{6}\ \%$; $\Delta b \approx 0{,}047\,\dot{2}$

c) $\frac{\Delta c}{c} \approx 0{,}085... = 8{,}516...\ \%$; $\Delta c \approx 0{,}528$

12.23 $\frac{\Delta R}{R} = 0{,}02 = 2\ \%$

12.24 $\frac{\Delta R}{R} \approx 0{,}15 = 15\ \%$

12.25 $A \approx (26{,}24 \pm 1{,}05)\ \text{cm}^2$; $\Delta A \approx 1{,}05\ \text{cm}^2$; $\frac{\Delta A}{A} \approx 0{,}040... = 4{,}001...\ \%$

12.26 Das maximale Volumen beträgt 2,009... Liter, ist also größer als 2 Liter. Peter könnte Recht haben. Das minimale Volumen beträgt 1,990... Liter, ist also kleiner als 2 Liter. Heidi könnte Recht haben.

12.27 Mindestens 13 Gläser bzw. höchstens 17 Gläser; beim Abkühlen der heiß abgefüllten Marmelade verringert sich deren Volumen.

12.28 $(433{,}44 \pm 43{,}216)\ \text{cm}^3$

12.29 $(3\,677{,}171... \pm 154{,}566...)\ \text{cm}^2$

12.30 $(126{,}745... \pm 0{,}721...)\ \text{cm}$

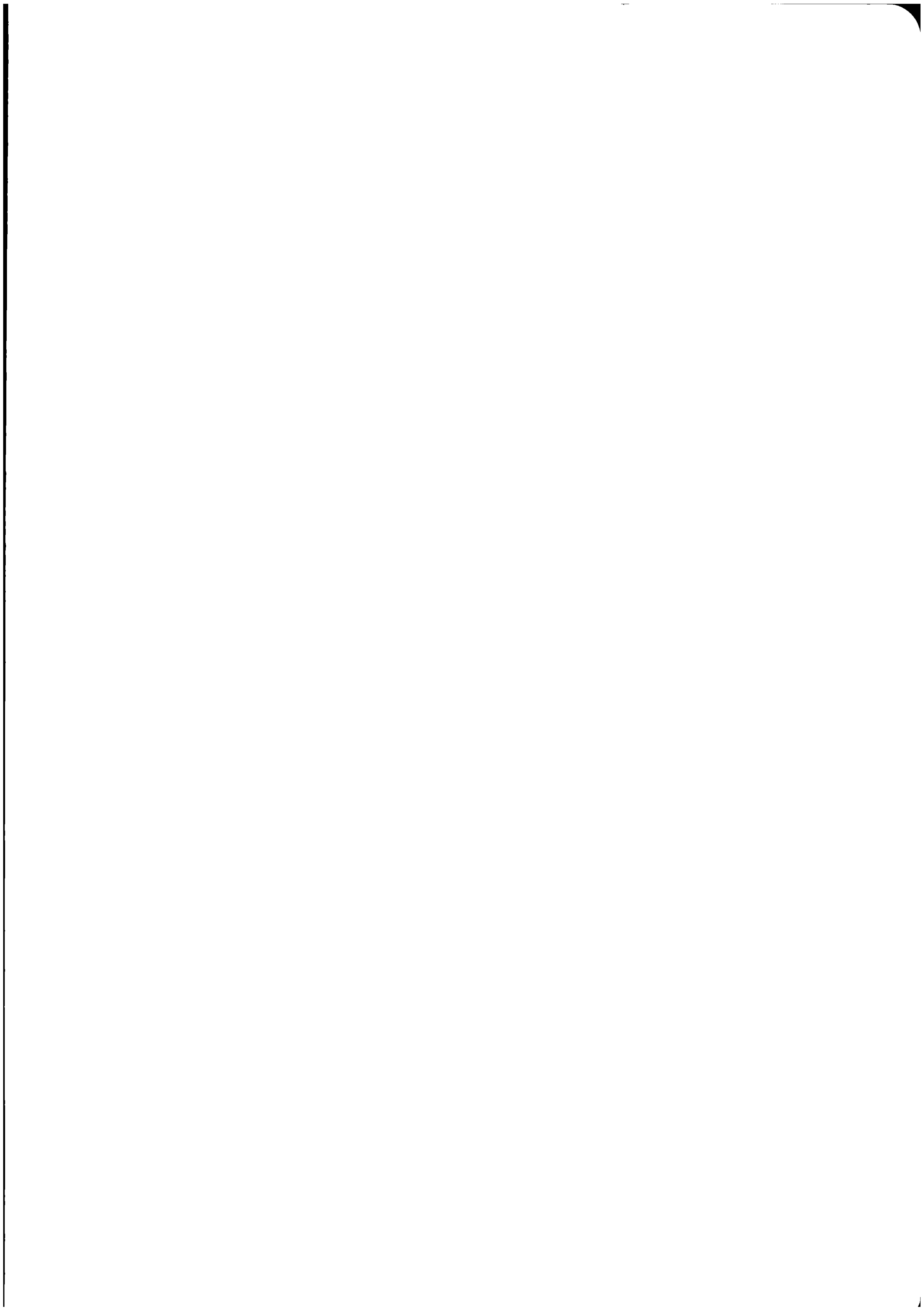
12.31 von 60 615 bis 107 826 Flaschen

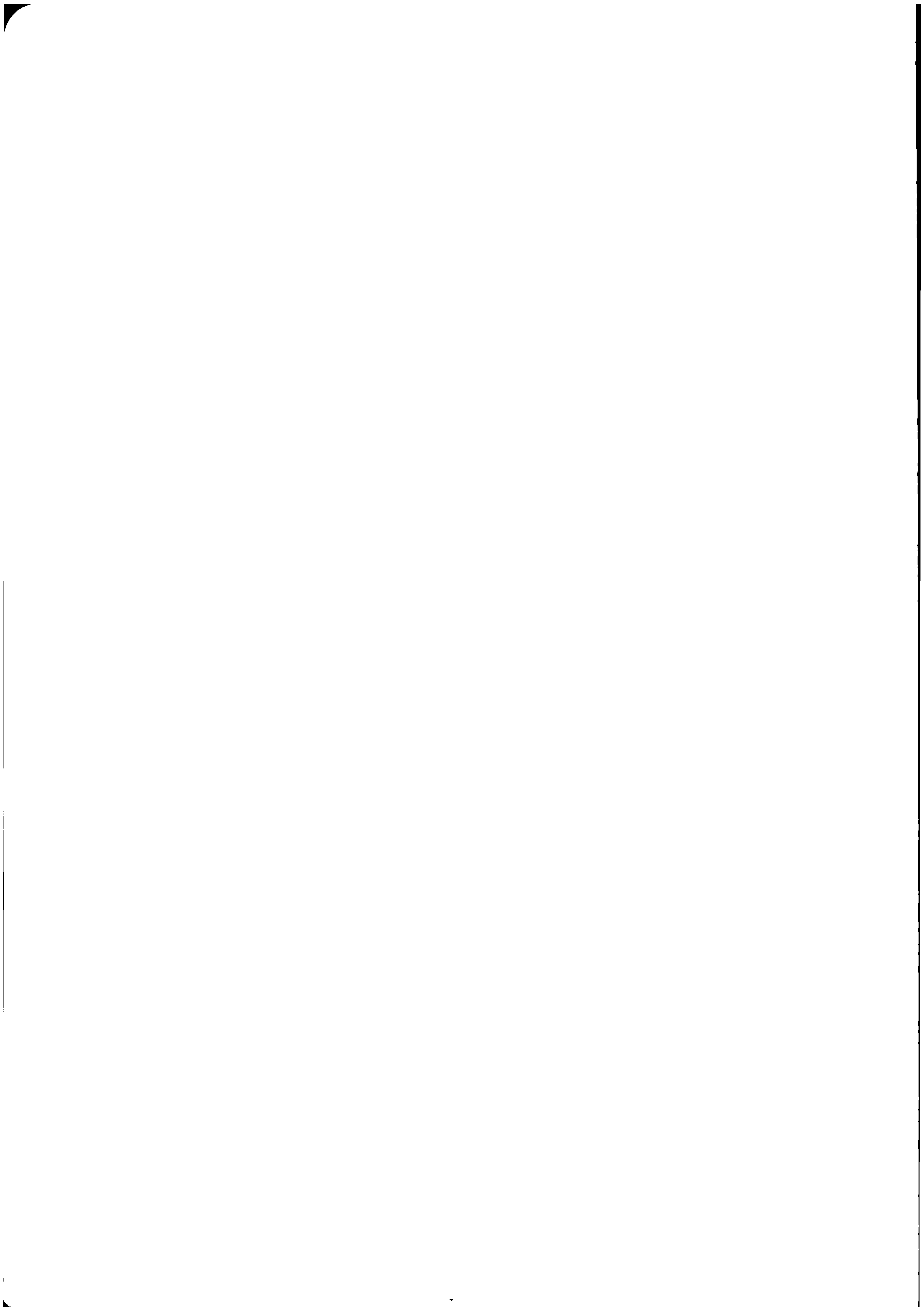
12.32 $(105{,}262... \pm 0{,}622...)\ \Omega$

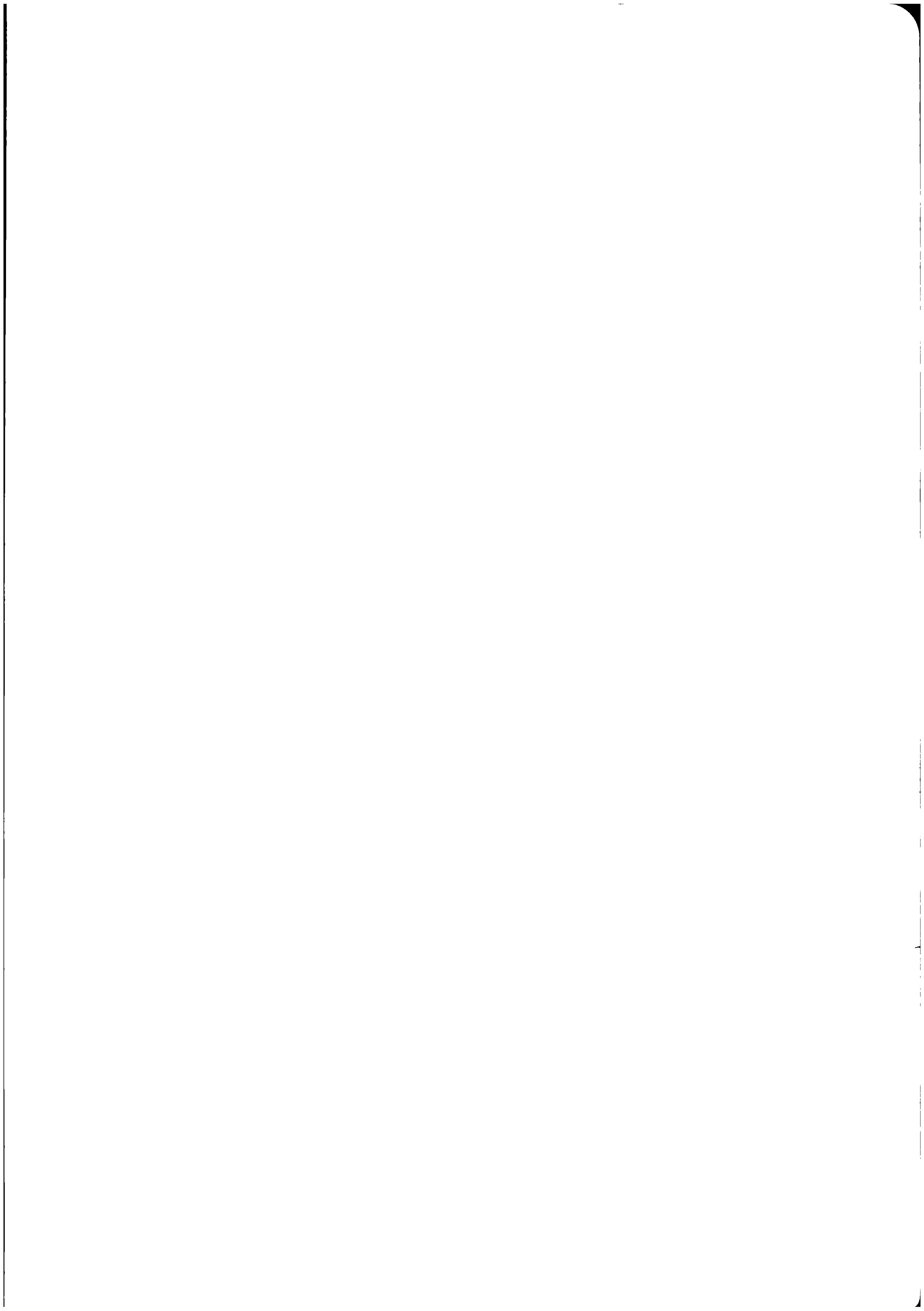
12.33 mindestens 490 $\text{m}\ell$, maximal 510 $\text{m}\ell$

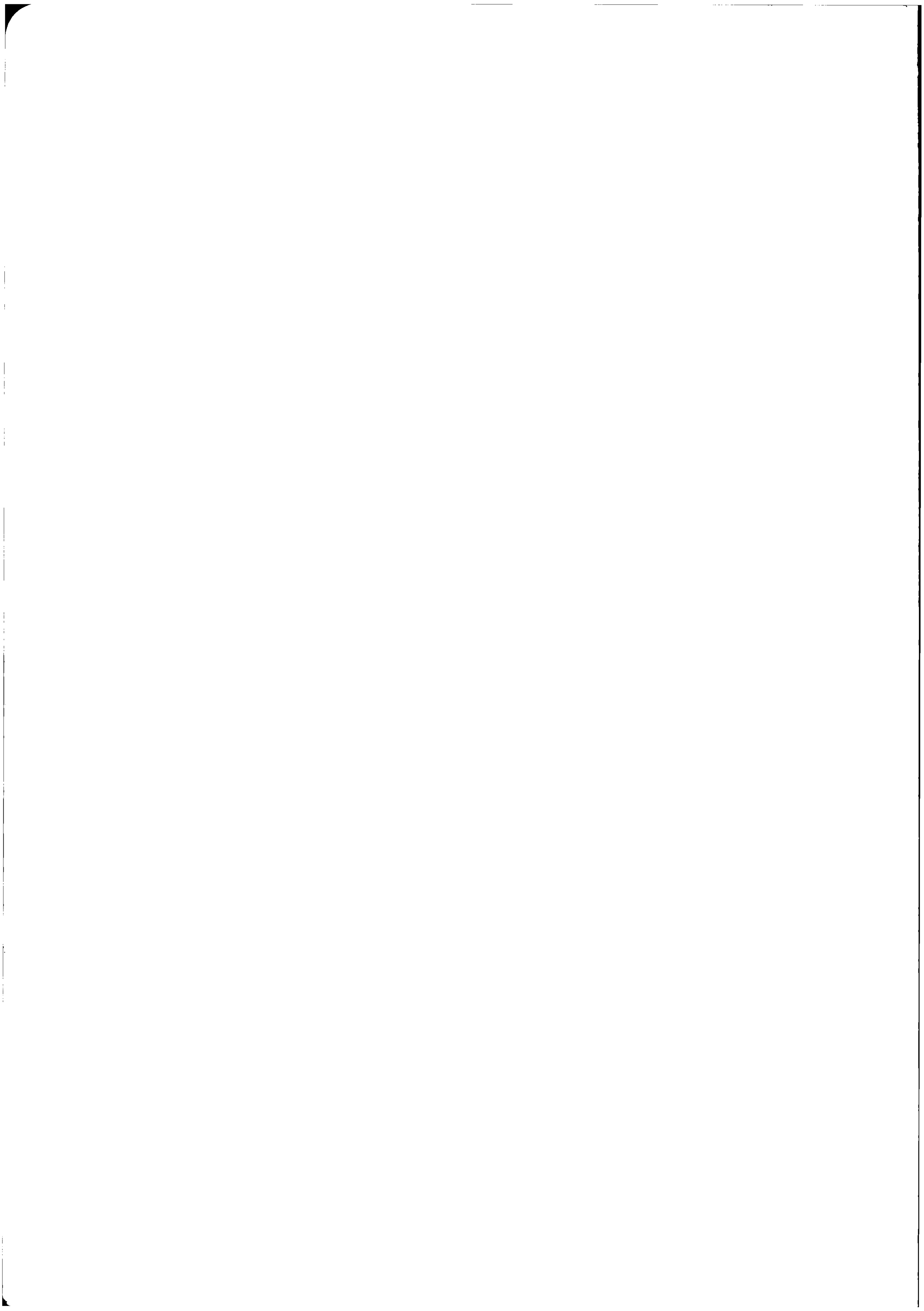
12.34 6 % bzw. 0,188... cm^2

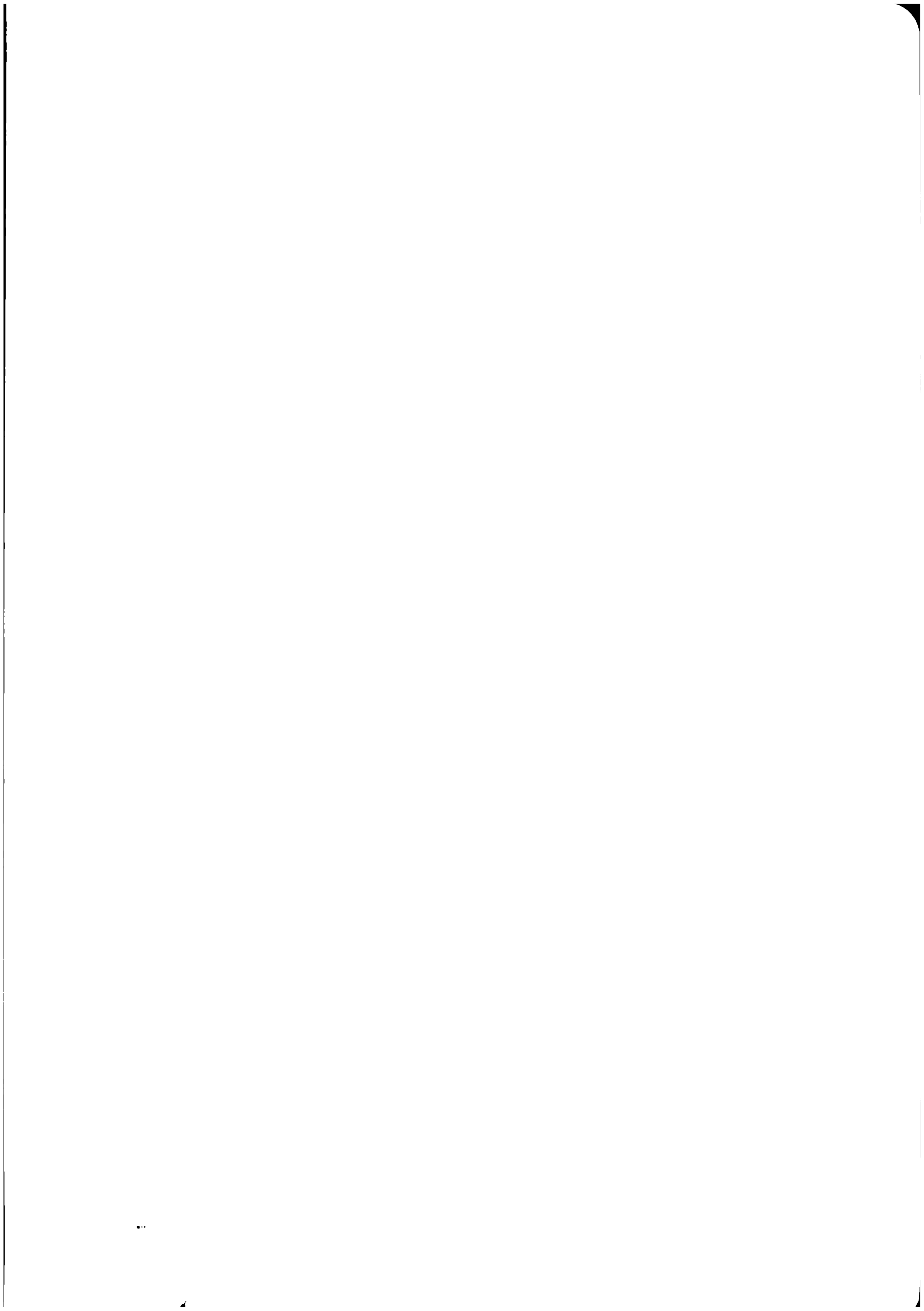
12.35 $V = (88{,}187... \pm 7{,}751...)\ \text{m}^3$, maximaler Fehler 7,751... m^3

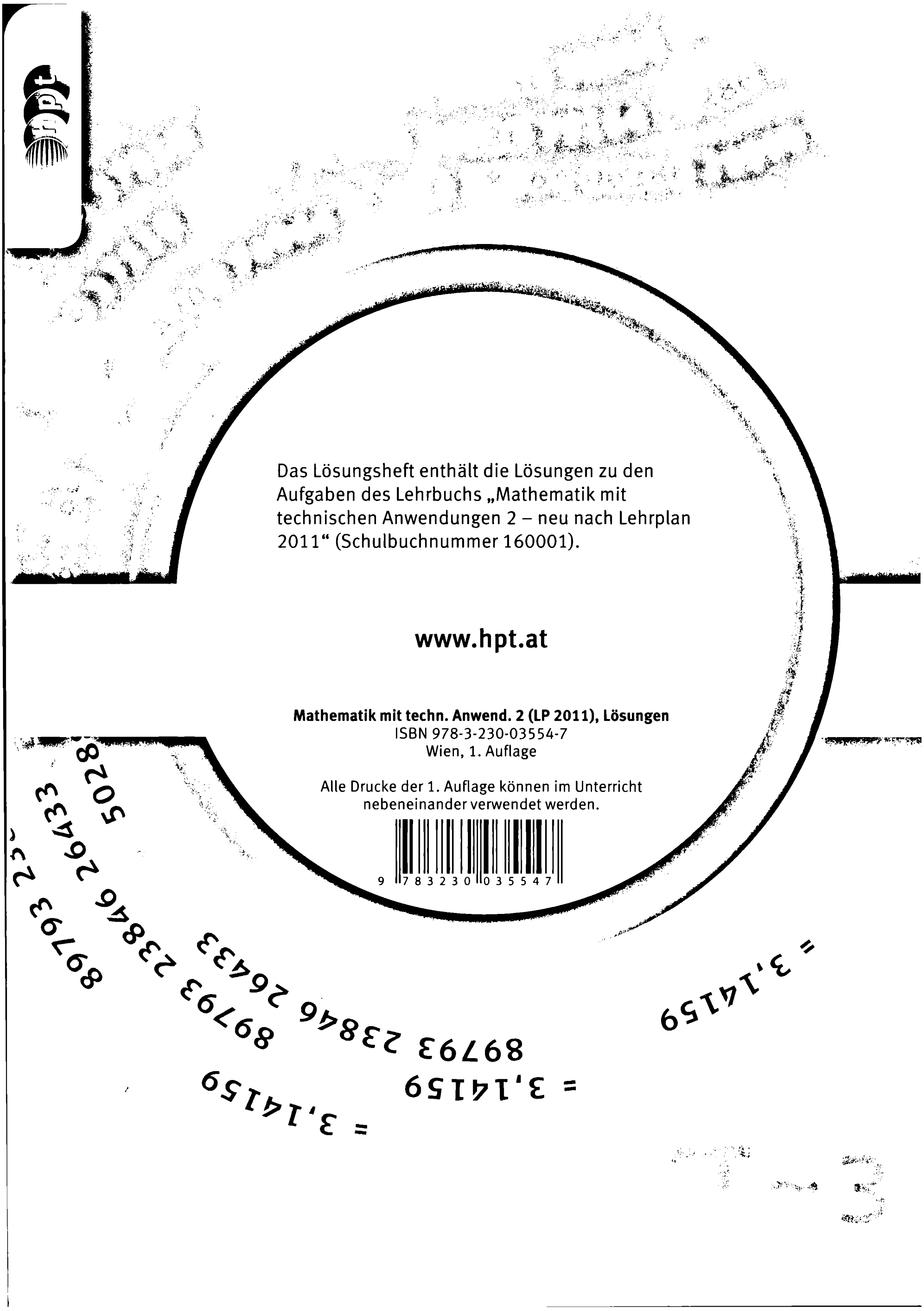












Das Lösungsheft enthält die Lösungen zu den Aufgaben des Lehrbuchs „Mathematik mit technischen Anwendungen 2 – neu nach Lehrplan 2011“ (Schulbuchnummer 160001).

www.hpt.at

Mathematik mit techn. Anwend. 2 (LP 2011), Lösungen
ISBN 978-3-230-03554-7
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9 783230 035547